EISTI	**ING1 – Génie Mathématique** **Examen final**	
	Matière : **Analyse numérique**	*Date* : **Mercredi 6 mai 2020**
	Tous documents autorisés	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **3**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄

Exercice 1. -

On cherche à résoudre l'équation $(E) : e^x + x - 3 = 0$ par une méthode de point fixe.

1. Montrer qu'il n'existe qu'une solution, et donner un intervalle de largeur 1 qui la contient.
2. On envisage deux solutions possibles pour le choix de la fonction g qui admet un point fixe :
$$g_1(x) = 3 - e^x$$
$$g_2(x) = \ln(3 - x)$$
Justifier que, pour ces deux fonctions, la méthode du point fixe permet de résoudre (E).
3. On décide de prendre comme point de départ $x_0 = 0$.
Démontrer la convergence ou non de cette méthode pour chacune des fonctions g_1 et g_2.
4. Est-il possible d'avoir une vitesse de convergence quadratique ?
5. Calculer les deux premières itérations (x_1 et x_2) pour chacune des deux fonctions.
6. On décide finalement d'abandonner la méthode de point fixe et d'essayer la méthode de Newton.
Donner la formule récurrence qui définit la méthode de Newton dans le cas de notre équation.
7. Calculer les deux premières itérations pour la méthode de Newton et comparer aux deux autres résultats.

Exercice 2. -
Le relevé de la vitesse d'écoulement de liquide réfirigérant dans une canalisation a donné les résultats suivants :

t (date en s)	0	10	20
v (vitesse en m/s)	$2,00$	$1,89$	$1,72$

1. Utiliser la méthode de votre choix pour trouver un polynôme, de degré minimal, qui interpole ces trois points.
2. Utliser ce polynôme pour évaluer la vitesse à la date 15 s.
3. **Question bonus :** Sans les résoudre, écrire les équations qui permettraient de déterminer la spline cubique naturelle qui répondrait au problème d'interpolation précédent.
   On demande les équations vérifiées par les coefficients permettant de déterminer les deux polynômes définissant cette spline.

Exercice 3. -
Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A possède une factorisation $L\,U$.
2. L'application de l'algorithme **facorisation LU « en place »** donne en sortie la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

3. En déduire les matrices L et U de cette factorisation, puis la valeur de $det(A)$.
4. La résolution du système linéaire $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donne la solution $c_1 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Celle du système $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donne la solution $c_2 = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   Utiliser la factorisation $L\,U$ et les solutions des deux systèmes précédents pour déterminer A^{-1}.
5. En déduire la valeur du conditionnement de A relativement à la norme infinie, c'est à dire : $cond_{\infty}(A) = \kappa_{\infty}(A)$

Exercice 4. -
On s'intéresse à la résolution du système linéaire :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Montrer que A est inversible.
2. Dans le cas où $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on applique la méthode de Gauss-Seidel en partant de $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer le premier itéré X_1.
3. Quelle condition doit vérifier α pour que la méthode de Gauss-Seidel converge ?
4. Dans le cas où $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, déterminer la matrice C_J de récurrence de la méthode de Jacobi.
5. Sachant que les valeurs propres de C_J sont $0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la méthode de Jacobi converge-t-elle ?