

	Devoir surveillé Analyse	5 juin 2014 (3 h)
		Ingénieur manager
Mathématiques 2013-2014		

Exercice 1. -

À l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2}$.
2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^2}$.

Exercice 2. -

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2}$.

1. Déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de F .
3. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .

Exercice 3. -

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x}(1 - x) + 1$ et C_f la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

1. Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0 est :

$$f(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de T par rapport à C_f au voisinage de ce point.
4. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
5. Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , tracer T et C_f .

Exercice 4. -

1. Montrer les deux égalités suivantes
 - (a) $\sin^3(t) = \sin(t) - \cos^2(t) \sin(t)$.
 - (b) $\cos^3(t) = \cos(t) - \sin^2(t) \cos(t)$.

2. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$
 où Γ est l'ellipse, parcourue dans le sens positif, d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
3. Montrer que $I = 2 \iint_{\mathcal{D}} (x - y) dx dy$
 où \mathcal{D} est le domaine fermé du plan délimité par l'ellipse Γ .
 Calculer la valeur de $J = \iint_{\mathcal{D}} (x - y) dx dy$.

Exercice 5. -

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2}$.
 (b) Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \ln x dx$.
2. Calculer l'intégrale $K = \iint_{\mathcal{D}} x^2 dx dy$
 où \mathcal{D} est le domaine défini par : $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0 ; x \leq 1 \text{ et } y^2 \leq x\}$