



+1/1/60+



Examen de rattrapage – Sujet n°1

ING1 – Génie Informatique – Optimisation linéaire

Romain Dujol, Jean-Paul Forest

Mardi 4 juillet 2017

Veillez inscrire lisiblement vos nom et prénom ci-dessous.

Nom :

Prénom :

Veillez également coder votre identifiant (numéro de badge EISTI) dans les cases ci-contre (noircir une case par chiffre et par colonne).

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6
<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8
<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9

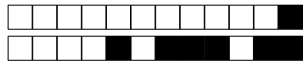
Instructions

- Durée : 2 heures.
- Le sujet est composé de 12 pages.
- Vous devez répondre sur le sujet lui-même.
- Aucun document n'est autorisé.
- Il est interdit de dégrafer les feuilles du sujet.
- Vous devez rédiger votre copie à l'aide d'un stylo à encre sombre exclusivement.
- Lorsque vous devez cocher une case vous devez la remplir sans déborder.
- Toute rature ou inscription dans un espace non prévu sera sanctionnée.
- Aucune machine électronique ne doit se trouver sur vous ou à proximité, même éteinte.
- Les déplacements et les échanges sont interdits.

Exercice 1

Soit a et b deux réels. On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ & ax_1 + bx_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

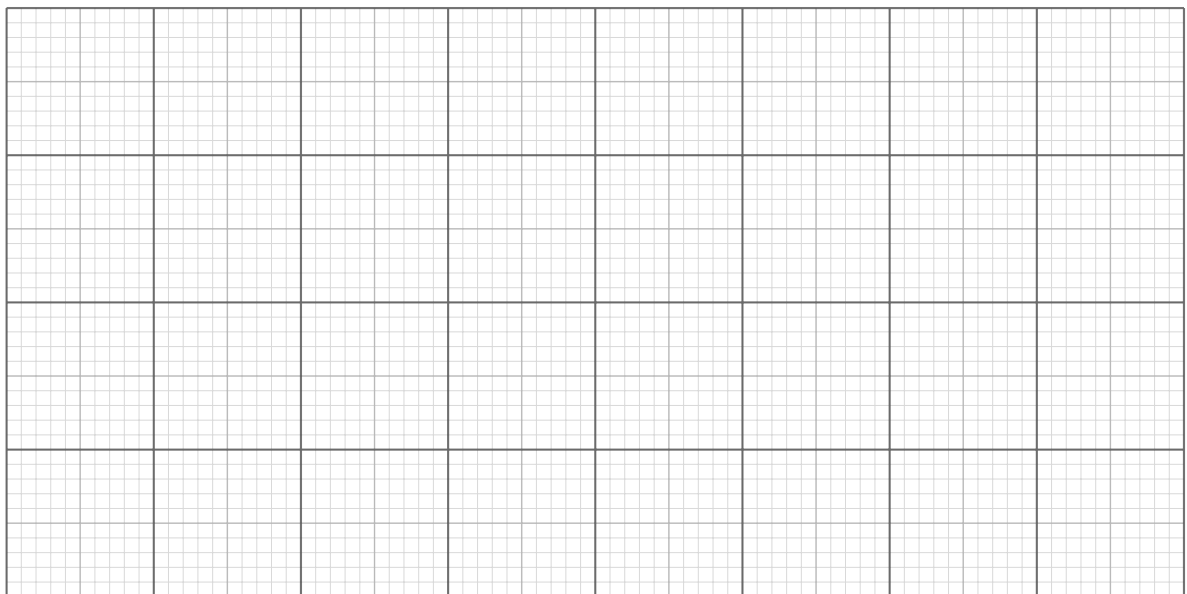


+1/2/59+

Question 1 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que l'ensemble des contraintes de (P) soit vide.

On illustrera le raisonnement par un exemple.

Réservé au correcteur A B C D E

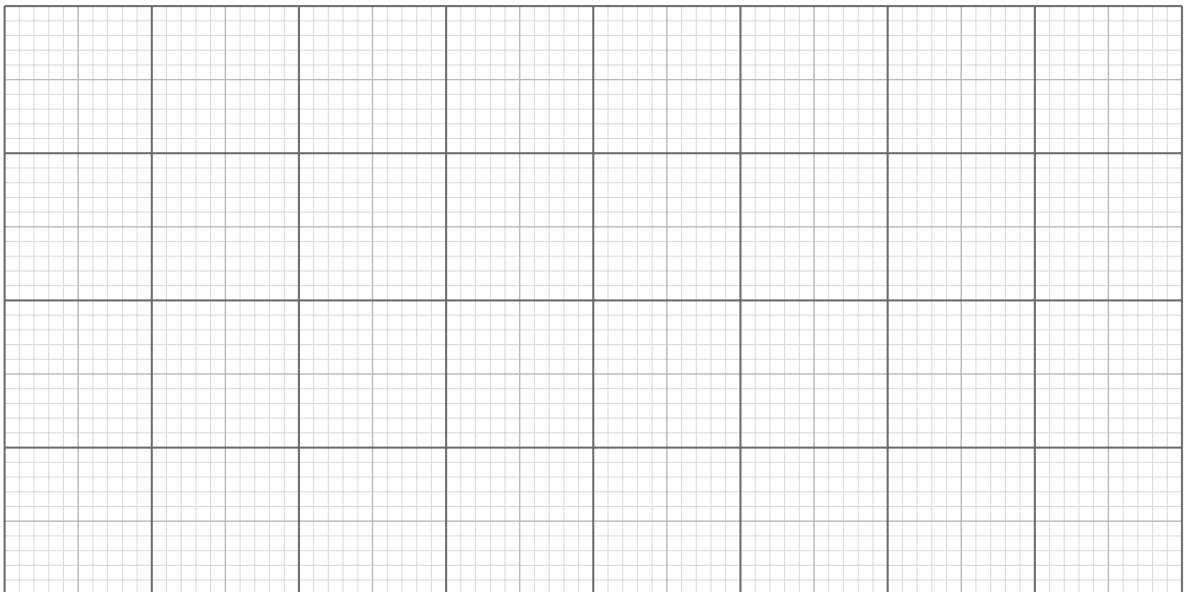




Question 2 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que l'ensemble des contraintes de (P) soit non borné.

On illustrera le raisonnement par un exemple.

Réservé au correcteur A B C D E



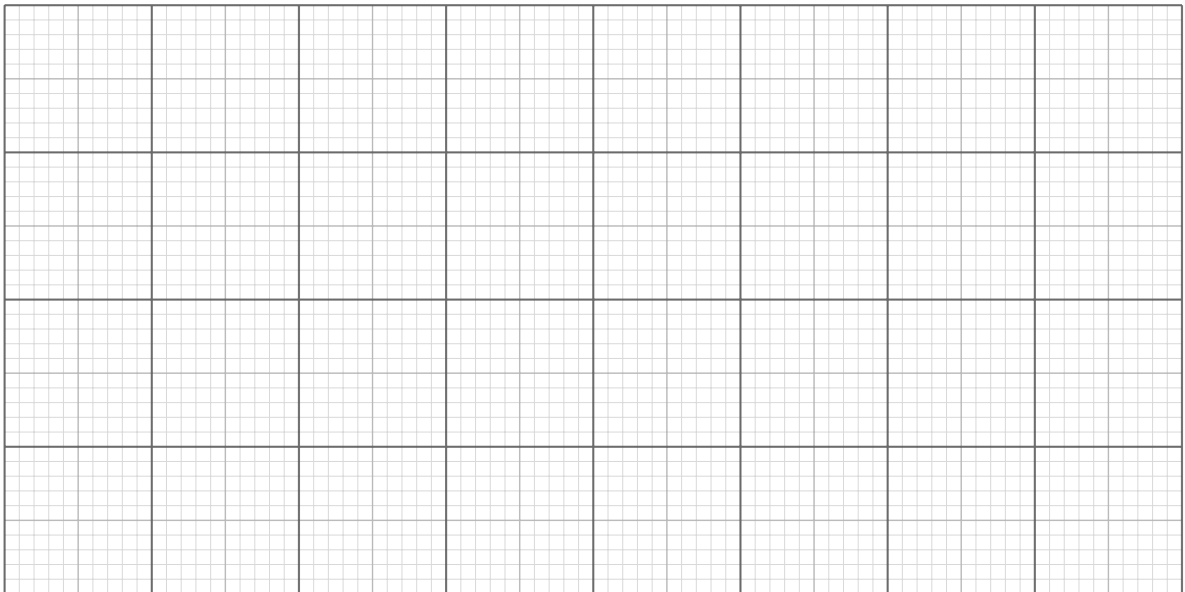


+1/4/57+

Question 3 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que (P) admette un unique optimum.

On illustrera le raisonnement par un exemple.

Réservé au correcteur A B C D E





Exercice 2

Pour son bar, Moe commande deux types de bières Duff™, de la Duff™ normale et de la Duff™ forte.

La Duff™ normale lui coûte deux dollars par gallon et il la vend 0,5 dollar la pinte.

La Duff™ normale lui coûte trois dollars par gallon et il la vend 0,75 dollar la pinte.

(On rappelle que, aux États-Unis, un gallon vaut huit pintes et correspond à environ 3,785 litres.)

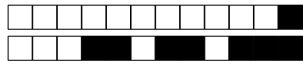
Cependant, dans le cadre d'une arnaque aux dessous très complexes, la compagnie Duff n'accepte une commande que si elle vend au moins deux gallons de Duff™ normale pour chaque gallon de Duff™ forte.

De plus, à cause d'évènements qu'il est préférable de ne pas divulguer, la compagnie Duff ne vendra pas à Moe plus de sept-cent cinquante gallons par semaine.

En supposant que toute Duff™ qu'il achète est vendue (car Moe sait qu'il peut compter sur ce bon vieux Barney), on cherche à déterminer combien de gallons de Duff™ normale et de Duff™ forte Moe doit acheter pour maximiser son profit.

Question 4 Formuler l'énoncé sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire (P).

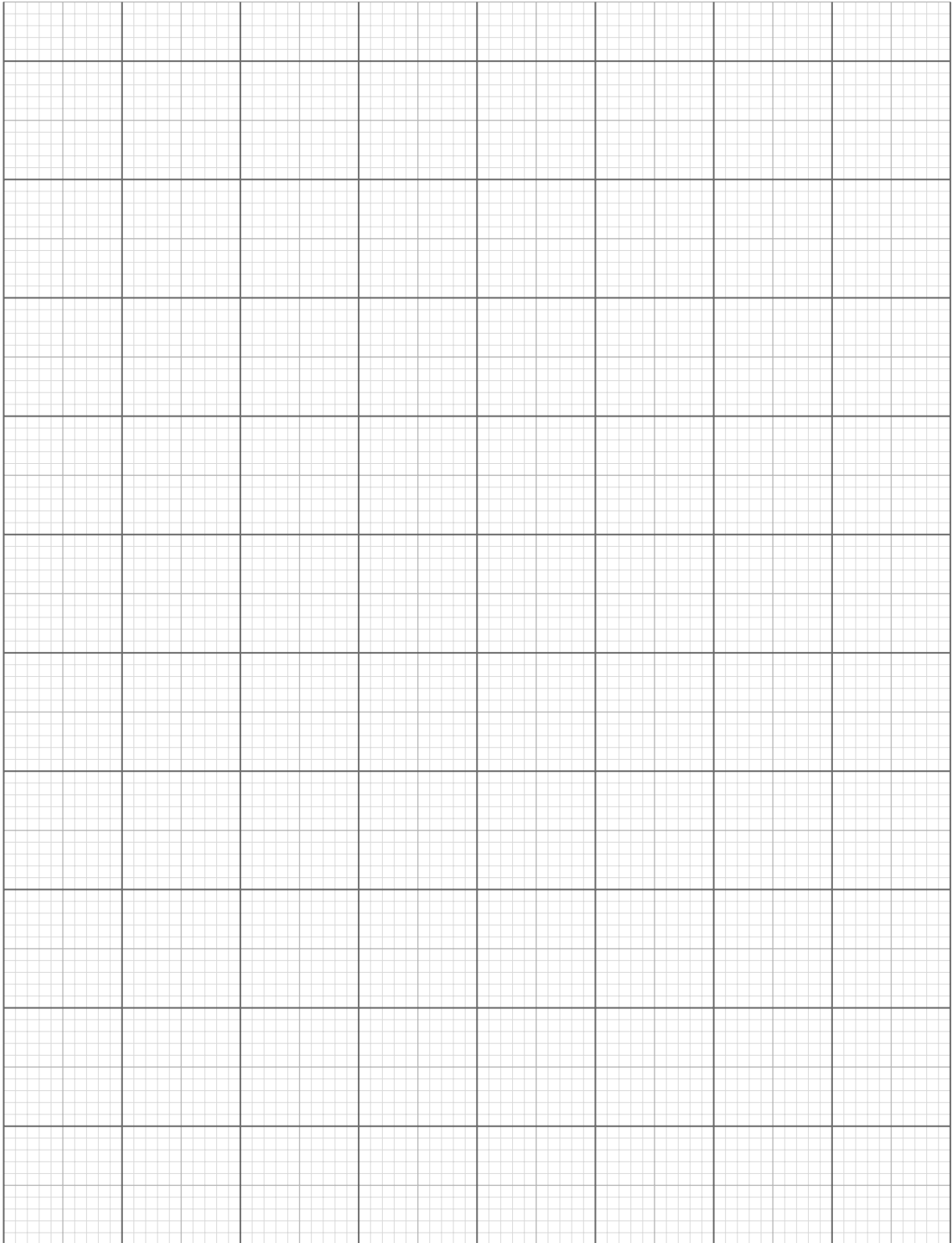
Réservé au correcteur A B C D E



+1/6/55+

Question 5 Résoudre (P) par la méthode géométrique.

Réservé au correcteur A B C D E





+1/7/54+

Question 6 Résoudre (P) par l'algorithme du simplexe.

Réservé au correcteur A B C D E



Exercice 3

Une personne fait une analyse de ses besoins en vitamines : chaque jour, elle a besoin de neuf milligrammes de vitamine A, cinq milligrammes de vitamine C et onze milligrammes de vitamine D.

Son détaillant en compléments alimentaires lui propose deux produits :

- le premier, au prix de trois centimes d'euros le comprimé, contient deux milligrammes de vitamine A, trois milligrammes de vitamine C et trois milligrammes de vitamine D ;
- le second, au prix de sept centimes d'euros le comprimé, contient cinq milligrammes de vitamine A, un milligramme de vitamine C et cinq milligrammes de vitamine D.

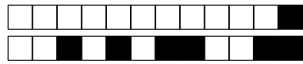
On cherche à déterminer la combinaison de comprimés que cette personne doit choisir pour assurer ses besoins en vitamines à moindre coût.

Question 9 Formuler l'énoncé sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire (P).

Réservé au correcteur A B C D E

Question 10 Écrire le problème dual (D) du problème (P) obtenu en question précédente.

Réservé au correcteur A B C D E



+1/10/51+

Question 11 Résoudre le problème dual (D).

Réservé au correcteur A B C D E



Question 12 En utilisant la théorie de la dualité, déterminer l'optimum de (P).

Réservé au correcteur A B C D E

Exercice 4

Soit le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

La figure ci-après est l'arbre obtenu par séparation et évaluation (*branch and bound*) avec les règles :

- *choix du problème à traiter* : règle de la plus grande valeur ;
- *choix de la variable de séparation* : règle de la plus grande distance à un entier.

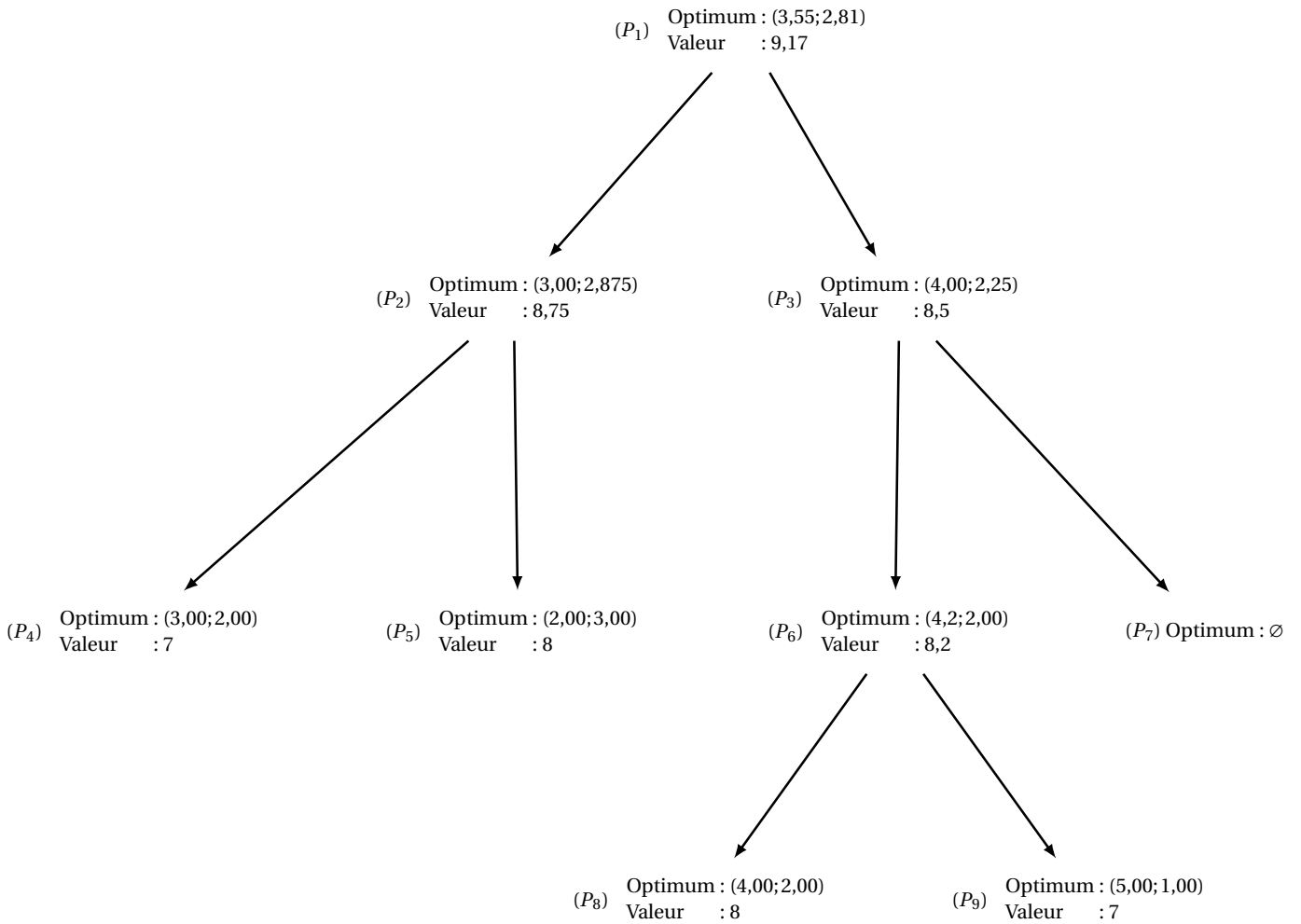


FIGURE 1 – Arbre obtenu par séparation et évaluation

Question 13 Sous ces hypothèses, rajouter les contraintes manquantes dans l'arbre.

Réservé au correcteur A B C D E

Question 14 Proposer un ordre de traitement correct des nœuds de cet arbre et trouver un optimum du problème posé.

Réservé au correcteur A B C D E