



Mathématiques	DS 8	P1C3-4
2013 - 2014		21/05/14 (3 h)

Calculatrice, téléphone portable et documents interdits

### Exercice 1. Questions de cours

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme.  
Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .
  - (a) Montrer que  $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$  libre  $\implies (v_1, v_2, \dots, v_n)$  libre.
  - (b) Montrer que  $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$  génératrice  $\implies (v_1, v_2, \dots, v_n)$  génératrice.
2. Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ , deux matrices. Quelles conditions doivent vérifier  $n, p, q, r$  pour que le produit matriciel  $BA$  soit défini ?
3. Montrer que si les produits  $AB$  et  $BA$  sont définis, alors la somme  $A + B$  est bien définie.

### Problème 1 Etude d'une application linéaire

---

On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_3[X]$ .

On définit l'endomorphisme  $f$  ainsi : pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ ,

$f(P)$  désigne le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X^2 + 1)$ .

c à d :  $P = (X^2 + 1)Q + f(P)$ , avec  $\deg(f(P)) < 2$  et  $Q, f(P) \in \mathbb{R}[X]$ .

1. Démontrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer  $\text{Ker}(f)$ .
3. Déterminer  $\text{Im}(f)$ .
4. L'application  $f$  est-elle injective? surjective?
5. Calculer  $f^2$  (i.e.  $f \circ f$ ). Que pouvez-vous en déduire ?

On note  $M$  l'ensemble des multiples de  $(X^2 + 1)$ , c'est à dire  
 $M = \{(X^2 + 1)Q, Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$ .

6. Démontrer que  $M$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
7. Démontrer que  $\mathbb{R}_3[X] = M \oplus \mathbb{R}_1[X]$ .

8. Démontrer que  $f$  est la projection sur  $\mathbb{R}_1[X]$  parallèlement à  $M$ . Quelle est la projection sur  $M$  parallèlement à  $\mathbb{R}_1[X]$  ?
9. Démontrer que la symétrie par rapport à  $\mathbb{R}_3[X]$  parallèlement à  $M$  est  $Id_{\mathbb{R}_3[X]} - 2.f$ .

**Exercice 2. Une autre application linéaire**

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (-x - 6y + 6z, 5y - 6z, 3y - 4z)$$

une application linéaire. On désigne par  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Donner la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau  $\text{Ker}(f)$ .
3. Déterminer l'image  $\text{Im}(f)$  et en déduire le rang de  $f$ ,
4. Soient  $v_1 = (3, 2, 2)$  ,  $v_2 = (1, 1, 1)$  ,  $v_3 = (-2, 2, 1)$ .
  - (a) Montrer que  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . On désignera cette base par  $\mathcal{B}'$ .
  - (b) Calculer  $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$  en fonction de  $v_1, v_2, v_3$ .
  - (c) En déduire la matrice  $C$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
  - (d) Calculer  $C^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Problème 2**

**Puissances d'une matrice**

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui lui est canoniquement associé.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On définit les vecteurs  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ;  $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Après avoir calculé  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ , déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. On note  $P$ , la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Vérifier que l'inverse de  $P$  est donné par  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

4. Calculer  $D = P^{-1}AP$  et vérifier qu'il s'agit d'une matrice diagonale déjà rencontrée.

5. Calculer  $D^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Montrer, par récurrence, que  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
7. En déduire que  $A^n = \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}$ .
8. Calculer directement  $A^2$  et  $A^3$  et vérifier la validité de la formule de la question précédente.