,twoside

Mathématiques	Examen de fin d'année	CPI 1
2012 - 2013	Corrigé d'algèbre	3 h

Partie commune à toutes les classes

Exercice 1. -

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{F} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. On veut que $\mathcal{F}$ soit un groupe pour la multiplication. On sait déjà la loi est une l.c.i. puisque le produit de 2 matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
   La multiplication de matrices est évidemment assiciative, l'élément neutre I_2 est bien dans $\mathcal{F}$, il correspond à $a = b = 1,\ c = 0$.
   Il reste l'inversiblité qui exige que le déterminant soit non nul. Il faut donc $ab \neq 0$.
   La bonne définition est donc : $\mathcal{F} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$
2. Le groupe ainsi défini n'est pas commutatif, exemple :
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. -

Soit A la matrice à coefficients réels donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $A = D + N$ avec $D = diag(2, -1, 1, 2)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice nilpotente vérifiant $N^2 = 0$.

2. On vérifie d'abord que $DN = ND$, ce qui nous autorise à utiliser la formule du binôme de Newton, qui donne :
$A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k D^{n-k} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} N^0 D^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} N^1 D^{n-1}$
$= D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$

Exercice 3. -

Soit N une matrice nilpotente d'indice 3 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$.
A tout réel t on associe la matrice $N(t) = I_n + tN + \frac{t^2}{2}N^2$.

1. En utilisant $N^3 = N^4 = 0$, on obtient : $N(t)N(-t) = I_n$.
2. La question 1. montre que $N(t)$ est inversible d'inverse $N(-t)$, par conséquent $N(t) \in GL_n(\mathbb{R})$.
3. On obtient facilement : $N(t)N(s) = I_n + (t+s)N + \frac{t^2+2ts+s^2}{2}N^2 = N(t+s)$.
4. L'égalité précédente indique que l'application : $t \longmapsto N(t)$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$?

Exercice 4 (Matrice et suites récurrentes)**. -**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x + 4z, 3x - 4y + 12z, x - 2y + 5z)$$

1. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$: immédiat.
2. Matrice de f relativement à la base canonique :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$
3. $det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$
4. L'endomorphisme $(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})$ est injectif si et ssi $det(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) \neq 0$. Donc si $\lambda \notin \{0; 1; 2\}$.

5. Soient $u = (-4; 3; 2), v = (-4; 0; 1)$ et $w = (2; 1; 0)$.
   (a) $\mathcal{B}_2 = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car famille libre de 3 vecteurs.
   (b) On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
   $P = Mat_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(id_{\mathbb{R}^3})$ et $id_{\mathbb{R}^3}$ inversible,donc P est inversible.
   Ou bien $P = Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$ et $\mathcal{B}_2$ est une base.
   (c) $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Après calcul, on obtient : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
6. A l'aide de l'expression analytique de f ou par produit matriciel, on obtient :
   $f(u) = 0, \quad f(v) = v$ et $f(w) = 2w$.
7. On en déduit $f^n(u) = 0, \quad f^n(v) = v$ et $f^n(w) = 2^n w$.
8. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   (a) Notons $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées dans $\mathcal{B}_2$, on a :
   $X' = P^{-1}X$.
   On obtient : $X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x + y - 2z \\ x - 2y + 5z \\ \frac{3}{2}x - 2y + 6z \end{pmatrix}$.
   (b) D'après 7., on en déduit :
   $f^n(x, y, z) = (x - 2y + 5z)v + (\frac{3}{2}x - 2y + 6z)2^n w$
   $$= \begin{pmatrix} (-4 + 3 \times 2^n)x + (8 - 2^{n+2})y + (-20 + 6 \times 2^{n+1})z \\ 3 \times 2^{n-1}x - 2^{n+1}y + 6 \times 2^n z \\ x - 2y + 5z \end{pmatrix}.$$
   (c) $A^n = \begin{pmatrix} -4 + 3 \times 2^n & 8 - 2^{n+2} & -20 + 6 \times 2^{n+1} \\ 3 \times 2^{n-1} & -2^{n+1} & 6 \times 2^n \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
9. On considère les trois suites définies par :
   $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} &= 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} &= u_n - 2v_n + 5w_n \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 0 \\ w_0 &= 0 \end{cases}$
   On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Les relations de récurrence deviennent : $X_{n+1} = AX_n$.
Une récurrence immédiate donne $X_n = A^n X_0$ et donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & -4 + 3 \times 2^n \\ v_n & = & 3 \times 2^{n-1} \\ w_n & = & 1 \end{array} \right.$$

Partie réservée uniquement au groupe C de Cergy

Exercice 5. -
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n est réciproque s'il s'écrit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ avec $a_k = a_{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n.
   $P(\frac{1}{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X^k}$, on met au même dénominateur X^n :
   $P(\frac{1}{X}) = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}}{X^n} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k}{X^n}$.
   Donc P est réciproque si et seulement si
   $P(\frac{1}{X}) = \dfrac{P(X)}{X^n} \Longleftrightarrow P(X) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
2. Soient P et Q réciproques avec $deg(P) = m$ et $deg(Q) = n$.
   Alors $deg(PQ) = m + n$.
   $X^{m+n}(PQ)(\frac{1}{X}) = X^m X^n P(\frac{1}{X}) Q(\frac{1}{X}) = X^m P(\frac{1}{X}) X^n Q(\frac{1}{X})$
   $= P(X)Q(X) = (PQ)(X)$.
3. On suppose que P et Q sont réciproques et Q divise P,avec $deg(P) = m$ et $deg(Q) = n$.
   Posons $R = \dfrac{P}{Q}$, c'est un polynôme de degré $deg(R) = m - n$.
   $X^{m-n} R(\dfrac{1}{X}) = X^{m-n} \dfrac{P}{Q}(\dfrac{1}{X}) = \dfrac{X^m P(\frac{1}{X})}{X^n Q(\frac{1}{X})} = \dfrac{P(X)}{Q(X)} = R(X)$.
   Donc R est réciproque.
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme réciproque.
   (a) P réciproque $\Rightarrow a_0 \neq 0$ donc 0 ne peut être une racine de P.
   D'autre part, si α est racine de P, alors $\alpha \neq 0$ et
   $\alpha^n P(\alpha^{-1}) = P(\alpha) = 0$, donc α^{-1} est également racine de P.
   (b) Si 1 est racine alors $P(1) = 0$. On dérive la relation de 1), ce qui donne :
   $P'(X) = nX^{n-1} P(\frac{1}{X}) + X^n \frac{-1}{X^2} P'(\frac{1}{X})$. Si on évalue en 1, cela donne :
   $P'(1) = -P'(1)$, par conséquent $P'(1) = 0$ et donc la multiplicité de 1 comme racine de P est supérieure ou égale à 2.
   (c) Si $deg(P) = n$ est impair alors, en remplaçant X par -1 dans la relation du 1), on obtient :
   $P(-1) = -P(-1)$, par conséquent $P(-1) = 0$.
   (d) Si P est de degré pair et si -1 est racine de P, on procède comme en (b) avec n pair, donc :
   $P'(-1) = -P'(-1)$ et par suite $P'(-1) = 0$, donc la multiplicité de -1 comme racine de P est supérieure ou égale à 2.

Partie réservée à Pau et aux classes A, B de Cergy

Exercice 6. -
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le polynôme à coefficients réels

$$A_n = a_n X^{n+1} + b_n X^n + 1$$

1. A_n divisible par le polynôme $B = (X-1)^2 \iff 1$ racine de multiplicité ≥ 2 de $A_n \iff A_n(1) = A'_n(1) = 0$.
   On doit donc résoudre le sysyème $\begin{cases} a_n + b_n + 1 & = & 0 \\ (n+1)a_n + nb_n & = & 0 \end{cases}$
   La solution est $a_n = n$ et $b_n = -n-1$.
   On considère désormais, pour la suite de l'exercice, ces deux suites $a = (a_n)_{n\geq 1}$ et $b = (b_n)_{n\geq 1}$ ainsi définies.
2. Pour tout $n \geq 1$, on appelle Q_n le quotient dans la division euclidienne de A_n par B.
   (a) $A_1 = X^2 - 2X + 1 = B$, donc $Q_1 = 1$.
   Pour montrer qu'on a : $Q_n = nX^{n-1} + Q_{n-1}$, calculons
   $B(nX^{n-1} + Q_{n-1}) = (X-1)^2 nX^{n-1} + BQ_{n-1}$
   $= nX^{n+1} - 2nX^n + X^{n-1} + A_{n-1}$
   $= nX^{n+1} - 2nX^n + X^{n-1} + (n-1)X^n - nX^{n-1} + 1$
   $= A_n$. Donc on a bien : $Q_n = nX^{n-1} + Q_{n-1}$
   (b) En écrivant : $kX^{k-1} = Q_k - Q_{k-1}$ et en sommant pour k allant de 2 à n, on obtient une somme télescopique dont il reste :
   $Q_n - Q_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} kX^{k-1}$.On en déduit :
   $Q_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$
3. Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\alpha^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Sinon, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\alpha^k = \alpha Q_n(\alpha) = \alpha \frac{A_n(\alpha)}{B(\alpha)} = \alpha \frac{n\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha^n + 1}{(\alpha-1)^2}$.