



Mathématiques	Examen de fin d'année Corrigé d'analyse	CPI 1
2012 - 2013		3 h

Partie commune à toutes les classes

Exercice 1. -

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$
donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Autre méthode : Avec un DL d'ordre 1 et au voisinage de 0 de l'exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + x + o(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + o(1)} = 1$$

On peut dire que f est prolongeable par continuité en 0 et on note f ce prolongement défini par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Les fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} , de plus $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^x - 1 \neq 0$ donc le quotient $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .

3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$.

4. DL d'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x(1 + x + o(x))}{(1 + x + o(x) - 1)^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}.$$

5. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{x}{e^x} \frac{1}{(1 - e^{-x})}$, x est négligeable devant e^x au voisinage de $+\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

6. $g(x) = e^x - 1 - xe^x$.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et $g'(x) = xe^x$. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1-x) - 1 = -\infty$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(x) < 0$. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(x) < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) < 0$ car $(e^x - 1)^2 > 0$.

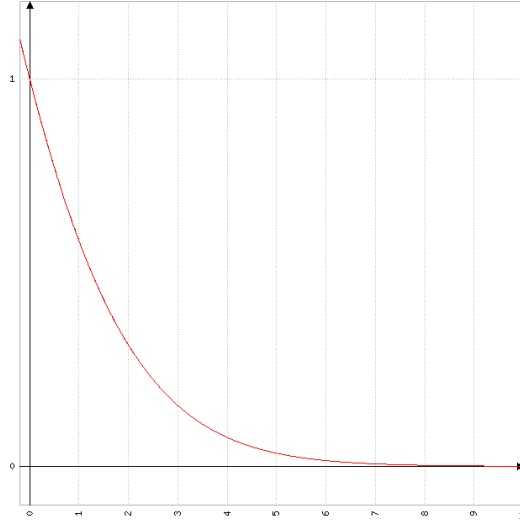


FIGURE 1 – Courbe de f

7.

8. Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ donc $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$, $1 > 0$.

Supposons que pour un entier n fixé et non nul, on ait $u_n \in \mathbb{R}^{+*}$.

$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{e^{u_n} - 1}$. Puisque $u_n > 0$ (par hypothèse de récurrence) alors $e^{u_n} - 1 > 0$ (exponentielle est une fonction croissante) et donc $\frac{u_n}{e^{u_n} - 1} > 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. La suite est donc bien définie.

9. $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow e^x - 1 = 1$ car $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a donc une solution unique $\alpha = \ln 2$

10. Sur un intervalle d'extrémités u_n et $\ln 2$ qu'on notera I , on utilise le théorème des accroissements finis :

$\exists c$ à l'intérieur de I tel que $\frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} = f'(c)$. Or $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$ donc

$$|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

Initialisation : pour $n = 0$, $|u_0 - \ln 2| \leq \frac{\ln 2}{2^0}$.

Supposons que pour un entier n fixé, on ait $|u_n - \ln 2| \leq \frac{\ln 2}{2^n}$.

A l'ordre $n + 1$, $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$ donc $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{\ln 2}{2^{n+1}}$.

$$11. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{2^n} = 0 \text{ car } \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ln 2| = 0 \text{ c.à.d. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 2. -

$$1. X^3 - 8 = (X - 2)(X^2 + 2X + 4).$$

2. Une division euclidienne d'abord, qui donne :

$$\frac{3X^4 + 12}{X^3 - 8} = 3X + \frac{24X + 12}{X^3 - 8}.$$

Les techniques habituelles permettent de terminer la décomposition et d'obtenir :

$$\frac{3X^4 + 12}{X^3 - 8} = 3X + \frac{5}{X - 2} + \frac{-5X + 4}{X^2 + 2X + 4}$$

$$3. I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 3} = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

On fait le changement de variable : $u = \frac{x+1}{\sqrt{3}}$ et donc $dx = \sqrt{3}du$.

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}du}{u^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

$$4. I = \int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 12}{x^3 - 8} dx = \int_{-1}^0 \left(3x + \frac{5}{x - 2} + \frac{-5x + 4}{x^2 + 2x + 4} \right) dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} + 5 \ln|x - 2| \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \left(\frac{-5}{2} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{9}{x^2 + 2x + 4} \right) dx$$

$$= -\frac{3}{2} + 5 \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{2} [\ln(x^2 + 2x + 4)]_{-1}^0 + 9 \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

$$= -\frac{3}{2} + 5 \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + -\frac{5}{2} \ln(3) + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 3. -

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt$$

1.

a. Si $0 < x \leq 1$ alors $t \leq 1$ et $\ln t \leq 0$ donc $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \leq 0$ ainsi $\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \geq 0$ (propriété cours : positivité de l'intégrale)

$x \geq 1$, $\ln t \geq 0$ donc $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \geq 0$ ainsi $\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \geq 0$ (propriété cours)

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) \geq 0$

b. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^{+*} donc pour $x \in \mathbb{R}^{+*}, 1 \in \mathbb{R}^{+*}$,

on a bien $x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ qui est bien définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

c. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^{+*}$ et $F(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} f(t) dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

On effectue le changement de variable suivant : $X = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{X}$ donc

$$- dX = -\frac{dt}{t^2} = -X^2 dt \Rightarrow dt = -\frac{dX}{X^2}.$$

- lorsque $t = 1$, $X = 1$ et lorsque $t = \frac{1}{x}$, $X = x$.

$$- \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \frac{\ln(\frac{1}{X})}{1+\frac{1}{X^2}} \left(-\frac{dX}{X^2} \right) = \frac{\ln(X)}{1+X^2} dX.$$

$$\text{Donc } F(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} f(X) dX = F(x).$$

3.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x} = (\arctan)'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$. Donc ϕ est prolongeable par continuité en 0.

(b) Intégration par parties :

$u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \arctan(t)$ et

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = [\arctan(t) \ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \phi(t) dt$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x) \ln(x) = 0$.

ϕ est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_1^0 \phi(t)dt$ est bien définie

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^x \phi(t)dt = \int_1^0 \phi(t)dt$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \phi(t)dt \right) = - \int_1^0 \phi(t)dt = \int_0^1 \phi(t)dt$$

La fonction F est bien prolongeable par continuité en 0 et

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ \int_0^1 \phi(t)dt & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Au voisinage $+\infty$, $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0^+ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_0^1 \phi(t)dt$$

Partie réservée au groupe C de Cergy

Exercice 4. -

Soit f la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

1. f est somme de fonctions \mathcal{C}^∞ et $f'(x) = 2 \tan^2(x) + 1 > 0$.
Elle est donc strictement croissante et donc bijective de I vers \mathbb{R} .
Elle admet par conséquent une fonction réciproque f^{-1} de classe \mathcal{C}^∞ .

2. Soit $y \in \mathbb{R}$,
 $x = f^{-1}(-y) \iff -y = f(x) \iff y = f(-x) \iff -x = f^{-1}(y)$
Donc $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$, autrement dit f^{-1} est impaire.

3. f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ donc admet des DL à tout ordre.
 f^{-1} est impaire donc les coefficients d'ordre pair sont nuls.
Le DL à l'ordre 6 sera donc de la forme :
 $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$.

4. $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$ donc $f(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^6)$
 $f \circ f^{-1} = id$ donc

$$x = (ax + bx^3 + cx^5) + \frac{2(ax + bx^3 + cx^5)^3}{3} + \frac{4(ax + bx^3 + cx^5)^5}{15} + o(x^6)$$

$$x = ax + bx^3 + cx^5 + \frac{2}{3}(a^3x^3 + 3a^2bx^5) + \frac{4}{15}(a^5x^5) + o(x^6)$$

$$x = ax + (b + \frac{2a^3}{3})x^3 + (c + 2a^2b + \frac{4}{15}a^5)x^5 + o(x^6)$$

$$\text{L'unicité des DL permet alors de dire : } \begin{cases} a & = 1 \\ b + \frac{2}{3}a^3 & = 0 \\ c + 2a^2b + \frac{4}{15}a^5 & = 0 \end{cases}$$

$$\text{Système dont la solution est : } \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -\frac{2}{3} \\ c & = \frac{16}{15} \end{cases}$$

$$\text{Autrement dit } f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^6)$$

Partie réservée à Pau et aux classes A et B de Cergy

Exercice 5. -

Soit l'équation différentielle (E) définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par :
 $-x^2 z'(x) + xz(x) = (z(x))^2$.

1. On pose $y(x) = \frac{1}{z(x)}$, donc $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ et par suite $z'(x) = \frac{-y'(x)}{(y(x))^2}$.

$$y \text{ solution de } (E) \iff -x^2 \frac{-y'(x)}{(y(x))^2} + x \frac{1}{y(x)} = \left(\frac{1}{y(x)}\right)^2$$

$$\iff x^2 y'(x) + xy(x) = 1.$$

2. (a) Sur $I =]1; +\infty[$, l'équation $x^2 y'(x) + xy(x) = 0$ est équivalente à $y' + \frac{1}{x}y = 0$, dont la solution générale est donnée par :

$$y(x) = \frac{\lambda}{x}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

(b) Pour obtenir une solution particulière de $x^2 y'(x) + xy(x) = 1$, on utilise la méthode de variation de la constante.

$$y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}, \text{ et donc } y'(x) = \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2}.$$

L'équation est alors équivalente à $\lambda'(x) = \frac{1}{x}$. On obtient comme

$$\text{solution particulière : } y_0(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

La solution générale est donc : $y(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{x}$ avec λ réel quelconque.

(c) Pour obtenir les solutions de (E) , il faut prendre $z = \frac{1}{y}$ et imposer $y(x) \neq 0$ sur I . Comme $\ln(x) > 0$, il suffit de prendre $\lambda \geq 0$.

Les solutions de (E) sont donc les $z(x) = \frac{1}{y(x)} = \frac{x}{\ln(x) + \lambda}$, avec λ réel positif quelconque.