EISTI

Mathématiques	Examen de fin d'année	CPI 1
2012 - 2013	Algèbre	3 h

Calculatrice, téléphone portable et documents interdits

Consignes :

- Toutes vos réponses doivent être justifiées
- Lors de la correction, il sera tenu compte de la présentation, de la clarté de la rédaction et de la rigueur des raisonnements.

Partie commune à toutes les classes

Exercice 1. -

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{F} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que $\mathcal{F}$ soit un groupe pour la multiplication.
2. Est-il commutatif ?

Exercice 2. -

Soit A la matrice à coefficients réels donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A = D + N$ où D est une matrice diagonale et N est une matrice nilpotente vérifiant $N^2 = 0$.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n, pour tout entier naturel n.

Exercice 3. -

Soit N une matrice nilpotente d'indice 3 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$.
A tout réel t on associe la matrice $N(t) = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$.

1. Calculer, pour tout t réel, le produit matriciel : $N(t)N(-t)$.
2. En déduire que $N(t) \in GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que c'est une matrice inversible.
3. Soient t et s deux réels quelconques, montrer que $N(t)N(s) = N(t+s)$.
4. Que représente l'application : $t \longmapsto N(t)$ pour les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$?

Exercice 4 (Matrice et suites récurrentes)**.** -

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x + 4z, 3x - 4y + 12z, x - 2y + 5z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (0; 1; 0)$ et $e_3 = (0; 1; 0)$.
   On notera cette matrice A.
3. Soit λ un réel. Montrer que $det(A - \lambda I_3) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de λ, l'endomorphisme $(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})$ est-il injectif ?
5. Soient $u = (-4; 3; 2), v = (-4; 0; 1)$ et $w = (2; 1; 0)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}_2 = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Justifiez pourquoi la matrice P est inversible.
   (c) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
   (d) Calculer l'inverse de la matrice P.
6. Déterminer l'image par f de u, v et w.
7. En déduire l'image par f^n de u, v et $w.(f^n = f^{n-1} \circ f,\ n \in \mathbb{N}^*)$.
8. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = (x, y, z)$.
   (a) A l'aide de la matrice de passage, exprimer les coordonnées de X dans $\mathcal{B}_2$.
   (b) Calculer $f^n(x, y, z)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
9. On considère les trois suites définies par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} & = & u_n - 2v_n + 5w_n \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 0 \\ w_0 & = & 0 \end{array} \right.$$

   Déterminer en fonction de n les termes généraux, u_n, v_n, et w_n des trois suites.

Partie réservée uniquement au groupe C de Cergy

Exercice 5. -
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n est réciproque s'il s'écrit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ avec $a_k = a_{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Le polynôme $X^3 - 2X^2 - 2X + 1$, par exemple, est un polynôme réciproque car on a $n = 3$ et pour $k = 0$ $a_0 = a_{3-0} = a_3$ et pour $k = 1$ $a_1 = a_{3-1} = a_2$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Démontrer que P est réciproque si et seulement si $P(X) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
2. Montrer que le produit de polynômes réciproques est réciproque. On pourra utiliser le propriété ci-dessus.
3. On suppose que P et Q sont réciproques et Q divise P. Démontrer en utilisant toujours la question 1 que $\dfrac{P}{Q}$ est réciproque.
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme réciproque.
   (a) Montrer que si α est racine de P, alors $\alpha \neq 0$ et α^{-1} est également racine de P.
   (b) Démontrer que si 1 est racine alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.
   (c) Démontrer que si le degré P est impair alors -1 est racine de P.
   (d) Établir que si P est de degré pair et si -1 est racine de P alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.

Partie réservée à Pau et aux classes A, B de Cergy

Exercice 6. -
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le polynôme à coefficients réels

$$A_n = a_n X^{n+1} + b_n X^n + 1$$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer les réels a_n et b_n tels que A_n soit divisible par le polynôme $B = (X-1)^2$.
   On considère désormais, pour la suite de l'exercice, ces deux suites $a = (a_n)_{n\geq 1}$ et $b = (b_n)_{n\geq 1}$ ainsi définies.
2. Pour tout $n \geq 1$, on appelle Q_n le quotient dans la division euclidienne de A_n par B.
   (a) Déterminer Q_1 puis, pour tout $n \geq 2$, montrer qu'on a :
   $Q_n = nX^{n-1} + Q_{n-1}$.
   (b) En déduire un expression de Q_n sous forme d'une somme.
3. A l'aide de ce qui précède, donner une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} k\alpha^k$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.