



Mathématiques	Examen de fin d'année Analyse	CPI 1
2012 - 2013		3 h

Calculatrice, téléphone portable et documents interdits

Consignes :

- Toutes vos réponses doivent être justifiées
 - Lors de la correction, il sera tenu compte de la présentation, de la clarté de la rédaction et de la rigueur des raisonnements.
-

Partie commune à toutes les classes

Exercice 1. -

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^{+*} par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f possède une limite l à droite de 0. Vous donnerez la valeur de cette limite.
Nous considérons désormais que f a été prolongée par continuité à droite de 0, en décidant que $f(0) = l$.
2. Montrez que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. Expliciter $f'(x)$, pour $x > 0$.
4. Montrer que f' possède une limite λ à droite de 0. Vous donnerer la valeur de cette limite.
Indication : vous pouvez vous aider d'un développement limité.
5. Montrer que $f(x)$ possède une limite quand x tend vers $+\infty$.
6. Après avoir mis f' sous la forme $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$, étudier le signe de g , éventuellement en la dérivant, et en déduire le tableau des variations de f .
7. Donner l'allure de la courbe représentative de f .
8. Montrer que les relations $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent effectivement une suite de réels.
9. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une et une seule solution dans \mathbb{R}^{+*} que l'on notera α .
10. On admet que pour $x \geq 0$, on a la majoration $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$.

On pourra commencer par établir $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

11. En déduire que la suite de terme général u_n converge ; vous préciserez sa limite.

Exercice 2. -

1. Factoriser sur \mathbb{R} le polynôme $X^3 - 8$.
2. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction rationnelle $\frac{3X^4 + 12}{X^3 - 8}$.
3. Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$.
4. En déduire la valeur de de l'intégrale $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 12}{x^3 - 8} dx$.

Exercice 3. -

On désire étudier la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

1. (a) Déterminer le signe de F sur \mathbb{R}^{+*} .
(b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur \mathbb{R}^{+*} .
(c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
2. Montrer que : $\forall x > 0, \quad F(x) = F(\frac{1}{x})$.
3. Soit ϕ la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par : $\forall x > 0, \quad \phi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$.
(a) Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.
(b) Montrer que : $\forall x > 0, \quad F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \phi(t)dt$.
(c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?

Partie réservée au groupe C de Cergy

Exercice 4. -

Soit f la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Justifier que f^{-1} est impaire.
3. Justifier que le DL de f^{-1} à l'ordre 6 est de la forme
 $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$.
4. En déduire le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6.

On rappelle que $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$ et $f \circ f^{-1} = id$.

Partie réservée à Pau et aux classes A et B de Cergy

Exercice 5. -

Soit l'équation différentielle (E) définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par :
 $-x^2z'(x) + xz(x) = (z(x))^2$.

1. On pose $y(x) = \frac{1}{z(x)}$. Montrer que z est solution sur I de (E) si et seulement si y est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera .
2. (a) Résoudre l'équation différentielle $x^2y'(x) + xy(x) = 0$.
(b) Résoudre ensuite $x^2y'(x) + xy(x) = 1$.
(c) En déduire les solutions de (E) .