Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information	# Examen de fin d'année
Nombre de pages : 4	*Algèbre 2013-2014*
Durée : 3 heures	*Date : 11 juin 2014*

****

- La calculatrice, le téléphone portable et tout document sont interdits.
- Les élèves sont invités à porter une attention particulière à la rédaction.
- La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée.
- Vérifier que le sujet comporte 4 pages.

****

EXERCICE I

Pour tout $m \in \mathbb{C}$, on définit la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 & m^3 \\ m^3 & 1 & m & m^2 \\ m^2 & m^3 & 1 & m \\ m & m^2 & m^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det(A_m) = \left(1 - m^4\right)^3$.

2. Préciser le rang de la matrice A_m, selon les valeurs de m.

3. Calculer A_m^{-1}, quand elle existe, par la méthode du pivot.

4. Soit maintenant la matrice :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer J, J^2, J^3, J^4 et retrouver le résultat de la question 3. .

EXERCICE II

1. Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

2. Soit un entier $n \geq 3$, on pose $A_n = X^n + X + 1$.

   (a) Décomposer $X^2 + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis déterminer le reste de la division euclidienne de A_n par $X^2 + 1$.

   (Distinguer les cas pair et impair).

   (b) Décomposer $X^2 + 2X + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis déterminer le reste de la division euclidienne de A_n par $X^2 + 2X + 1$.

3. Soit $P = X^5 + 4X^4 + 7X^3 + 7X^2 + 4X + 1$.

   (a) Justifier que -1 est racine de P et déterminer sa multiplicité.

   (b) En déduire la factorisation de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $X^2 P'' - 2P = 0$.

   On pourrait commencer par montrer que $\deg(P) = 2$ en raisonnant sur les termes de plus haut degré.

EXERCICE III

Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle centre de G et on note $Z(G)$, l'ensemble défini par

$$Z(G) = \left\{x \in G,\ x * y = y * x,\ \forall y \in G\right\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que G est commutatif si et seulement si $Z(G) = G$.

3. Supposons G commutatif. On définit l'application f par

$$\begin{array}{rcccl} f & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & a * x \end{array}$$

   où a est un élément quelconque mais fixé de G.

   Montrer que f est bijective.

EXERCICE IV

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les fonctions réelles définies par :

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = xe^{-x}, \quad f_3(x) = x^2 e^{-x}.$$

On considère F le sous espace vectoriel de E engendré par $f_1,\ f_2,\ f_3$ et l'application φ définie par

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & F & \longrightarrow & F \\ & & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

1. Montrer que $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ est une base de F. On note $\mathscr{B} = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$.

2. Montrer que φ est un endomorphisme de F.

3. Déterminer la matrice de φ relativement à la base $\mathscr{B}$ de F. On note cette matrice A.

4. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour tout entier n, calculer J^n.

   (b) Vérifier que $A = J - I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

(c) Montrer que pour tout entier n,

$$A^n = (-1)^n \left(I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \right)$$

où I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

5. On note $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (Composition n fois de la fonction φ). Donner la matrice de l'application φ^n dans la base $\mathscr{B}$.

6. (a) Soit h une fonction de Classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Supposons que $h \in F$ et on note par $h^{(n)}$ la dérivée n-ième de h.

   Soit H le vecteur des coordonnées de h dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que la représentation matricielle de $h^{(n)}$ est donnée par $A^n H$.

   (b) **Application** : calculer pour tout entier n, la dérivée n-ième de h où $h(x) = \left(3 - 2x + 8x^2\right) e^{-x}$.