Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information	# Examen de fin d'année

Nombre de pages : 5	*Analyse 2013-2014*
Durée : 3 heures	*Date : 11 juin 2014*

****

- La calculatrice, le téléphone portable et tout document sont interdits.
- Les élèves sont invités à porter une attention particulière à la rédaction.
- La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée.
- Vérifier que le sujet comporte 5 pages.

****

EXERCICE I

1. **QUESTIONS PRELEMINAIRES**

   (a) Rappeler le tableau de variations complet de la fonction arctan et donner une expression pour sa dérivée.

   (b) Justifier que le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction arctan est donné par :
   $$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

   (c) Démontrer que pour tout $u > 0$, on a l'inégalité $u > \arctan(u)$.

2. **ETUDE D'UNE FONCTION**

   L'objet de cette partie est l'étude de la fonction f d'une variable réelle définie par
   $$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $\mathscr{R}$.

   (a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f puis justifier que f est de classe C^∞ sur ce domaine.

   (b) ***Etudes asymptotiques :***

   i. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$.

   ii. Donner un équivalent simple de $\arctan(x)$ en 0.

   iii. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

   iv. Calculer un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$ au voisinage de $x = 0$.

   v. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme
   $$f(x) = a_1 x + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$
   où a_{-1}, a_0 et a_1 sont trois réels que l'on précisera.

   vi. Conclure que $\mathscr{C}_f$ admet une même droite asymptote lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$; on précisera l'équation de l'asymptote ainsi que sa position relative à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. ***Tableau de variations :***

   (a) Justifier que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = xg(x)$ où g est une fonction définie sur D_f à expliciter.

   (b) Etudier la fonction g pour obtenir son signe.

EXERCICE II (*Les questions 1. et 2. sont indépendantes*)

1. On considère la fonction réelle définie par $f : t \mapsto \dfrac{2t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}$.

   (a) Donner le domaine de continuité de f.

   (b) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fonction f.

   (c) Calculer $\displaystyle\int \frac{2t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}dt$.

2. En précisant son domaine de définition, calculer $\displaystyle\int \left(x^3+x^2\right)e^{-x}\,dx$.

EXERCICE III

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par:

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + \dfrac{1}{2}\left(a-u_n^2\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\left(a-x^2\right)$.

1. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   (b) Discuter suivant les valeurs de a, en tenant compte du théorème du point fixe, la convergence ou la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

2. On suppose que $a < 0$. Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sa nature (convergence ou divergence), puis sa limite éventuelle.

3. On suppose que $a = 0$. Calculer u_1, u_2, u_3. De même pour $a = 4$. Que peut-on conclure pour ces deux cas?

4. On suppose que $a = 2$.

   (a) Etudier les variations de la fonction f.

   (b) Encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [1,2]$ puis montrer que $\forall n \geq 1$, $1 \leq u_n \leq 2$.

   (c) Vérifier que $\forall n \geq 0$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \left|\dfrac{1}{2}(u_n + \sqrt{2}) - 1\right| = \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right|$ et en déduire que :

   $$\forall n \geq 1, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|.$$

   (d) En déduire que $\forall n \geq 1$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

   (e) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

EXERCICE IV

Cet exercice s'adresse exclusivement aux élèves du campus de Cergy

L'objet de cet exercice est l'étude de l'équation différentielle :

$$\left(1-x^2\right)y^{'}+xy=P(x), \qquad (E_P)$$

où P désigne une fonction polynomiale à coefficients réels.
On note (E_0) l'équation homogène associée à toute équation (E_P) :

$$\left(1-x^2\right)y^{'}+xy=0., \qquad (E_0)$$

1. Sur quels intervalles existe-il des solutions ?

2. Résoudre l'équation (E_0).

3. On considère maintenant la fonction polynomiale P_1 définie par $P_1=1-x^2$.

   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de $\left(E_{P_1}\right)$ et leur domaine de définition.

   (b) Montrer que $\left(E_{P_1}\right)$ admet une unique solution $y=f_1$ telle que $y(0)=0$.

   (c) Donner le développement limité à l'ordre 3 pour f_1 en 0.

EXERCICE IV

Cet exercice s'adresse exclusivement aux élèves du campus de Pau

Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit une fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -x^n \ln x & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que la fonction f_n est continue sur $[0,1]$.
   (b) Justifier que la fonction f_n est dérivable sur $]0,1]$.
   (c) Montrer que pour $n \geq 2$, la fonction f_n est dérivable à droite en $x = 0$.
2. Montrer que
$$\max_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) \right| = \frac{1}{ne}, \quad \left(\text{où } e = e^1\right).$$
3. On pose
$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$
Déduire de la question 2. que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
4. On se propose de calculer I_n explicitement.
   (a) Pour tout réel $\epsilon > 0$, montrer que
$$\int_\epsilon^1 f_n(x)\, dx = \frac{\epsilon^{n+1} \ln \epsilon}{n+1} + \frac{1 - \epsilon^{n+1}}{(n+1)^2}.$$
   (b) Montrer que pour n fixé,
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^\epsilon f_n(x)\, dx = 0.$$
   (c) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
   (d) Expliquer pourquoi on a introduit $\epsilon > 0$ pour effectuer ce calcul.