Corrigé Exam final algèbre 2014

Exo 1

1° $\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 & m^3 \\ m^3 & 1 & m & m^2 \\ m^2 & m^3 & 1 & m \\ m & m^2 & m^3 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - m^3 L_1$, $\quad L_3 \leftarrow L_3 - m^2 L_1$, $\quad L_4 \leftarrow L_4 - m L_1$

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 & m^3 \\ 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & m^2(1-m^4) \\ 0 & 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1-m^4 \end{vmatrix} = 1 \times (1-m^4) \times (1-m^4) \times (1-m^4)$$

$$= (1-m^4)^3.$$

2° Si $1-m^4 = 0 \iff m^4 = 1 \iff m$ racine $4^{\text{ème}}$ de l'unité

$\iff m \in \{-1; 1; -i; i\}$.

alors $rg(A_m) = rg(B_m)$ où B_m est la matrice obtenue après les 3 opérations élémentaires de la question précédente,

$$rg(A_m) = rg\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 & m^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Si $1-m^4 \neq 0 \iff m \notin \{-1; 1; -i, i\}$

alors $\det(A_m) \neq 0$, A_m inversible

$\implies rg(A_m) = 4$.

3° On applique les opérations sur les lignes à la matrice A_m étendue par ajout de la matrice identité.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & m^2 & m^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m^3 & 1 & m & m^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m^2 & m^3 & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & m^2 & m^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - m^3 L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - m^2 L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - m L_1$

On obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & m^2 & m^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & m^2(1-m^4) & -m^3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & -m^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-m^4 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m^3}{1-m^4} L_4$

$L_2 \leftarrow L_2 - m^2 L_4$

$L_3 \leftarrow L_3 - m L_4$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & m^2 & 0 & 1+\frac{m^4}{1-m^4} & 0 & 0 & \frac{-m^3}{1-m^4} \\ 0 & 1-m^4 & m(1-m^4) & 0 & 0 & 1 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & 1-m^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1-m^4 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m^2}{1-m^4} L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - m L_3$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & 0 & 0 & \frac{1}{1-m^4} & 0 & \frac{m^2}{1-m^4} & 0 \\ 0 & 1-m^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1-m^4 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m}{1-m^4} L_2$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-m^4} & \frac{-m}{1-m^4} & 0 & 0 \\ 0 & 1-m^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1-m^4 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m^4} L_2$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{1-m^4} L_3$

$L_4 \leftarrow \frac{1}{1-m^4} L_4$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-m^4} & -\frac{m}{1-m^4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-m^4} & \frac{-m}{1-m^4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-m^4} & \frac{-m}{1-m^4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-m}{1-m^4} & 0 & 0 & \frac{1}{1-m^4} \end{array}\right)$$

$A_m^{-1} =$

4°
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

On remarque que : $A_m = I_4 + mJ + m^2J^2 + m^3J^3$.

L'inverse obtenu est : $A_m^{-1} = \frac{1}{1-m^4} I_4 + \frac{-m}{1-m^4} J = \frac{1}{1-m^4}(I_4 - mJ)$

Vérification : $\frac{1}{1-m^4}(I_4 - mJ)(I_4 + mJ + m^2J^2 + m^3J^3)$

$$= \frac{1}{1-m^4}\left(I_4 + \cancel{mJ} + \cancel{m^2J^2} + \cancel{m^3J^3} - \cancel{mJ} - \cancel{m^2J^2} - \cancel{m^3J^3} - m^4J^4\right)$$

$$= \frac{1}{1-m^4}(I_4 - m^4 I_4) = I_4.$$

Exo 2   2° $A_n = X^n + X + 1 \qquad n \geq 3.$

a) $X^2+1 = (X-i)(X+i)$

Le reste de la division euclidienne de A_n par (X^2+1) sera un polynôme de degré ≤ 1, donc de la forme $aX+b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

$X^n + X + 1 = (X^2+1)Q + aX + b.$

On évalue cette égalité en i et en $-i$

$i^n + i + 1 = 0 \times Q + ai + b$

$(-i)^n - i + 1 = 0 \times Q - ai + b.$

On résout le système $\begin{cases} ai+b = i^n+i+1 \\ -ai+b = (-i)^n-i+1 \end{cases}$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}\left[i^n+(-i)^n+2\right] \\ a = \frac{1}{2i}\left[i^n-(-i)^n+2i\right] \end{cases}$$

Si n pair : $\begin{cases} a = 1 \\ b = i^n+1 \end{cases}$ Si n impair $\begin{cases} a = i^{n-1}+1 \\ b = 1 \end{cases}$

Reste : $X+(i^n+1)$ ou $(i^{n-1}+1)X+1$

b) $X^2+2X+1 = (X+1)^2$ m̂ raisonnement

$A_n = (X+1)^2 Q + aX+b$ On dérive cette égalité

$A_n' = nX^{n-1}+1 = 2(X+1)Q+(X^2+1)Q'+a.$

On évalue les 2 égalités en (-1) ce qui donne :

$(-1)^n-1+1 = 0\times Q + a(-1)+b.$

$n(-1)^{n-1}+1 = 0\times Q+0\times Q'+a$

Ce qui donne $\begin{cases} a = n(-1)^{n-1}+1 \\ -a+b = (-1)^n \end{cases} \Rightarrow b = (-1)^n+n(-1)^{n-1}+1$

Reste $= \left[n(-1)^{n-1}+1\right]X + (-1)^n+n(-1)^{n-1}+1.$

3°) $P = X^5+4X^4+7X^3+7X^2+4X+1$

a) $P(-1) = 0$ $P' = 5X^4+16X^3+21X^2+14X+4$

$P'(-1) = 0$ $P'' = 20X^3+48X^2+42X+14$

$P''(-1) = 0$ $P^{(3)} = 60X^2+96X+42$

$P^{(3)}(-1) \neq 0$

-1 est racine de multiplicité 3 de P.

b) On effectue la division euclidienne de P par $(X+1)^3 = X^3+3X^2+3X+1$ on obtient :

$$P = (X+1)^3(X^2+X+1) \quad \text{factorisation dans } \mathbb{R}[X]$$

$$P = (X+1)^3(X-j)(X-\bar{j}) \quad \text{" " } \mathbb{C}[X].$$

4° Supposons P de degré n de terme de + haut degré $a_n X^n$.

Le terme de plus haut degré de P'' sera alors $n(n-1)a_n X^{n-2}$

$$X^2P''-2P=0 \implies n(n-1)a_n - 2a_n = 0$$

$$\implies (n^2-n-2)a_n = 0 \quad \text{Comme } a_n \neq 0$$

$n^2-n-2=0$ solution $\cancel{n=-1}$ ou $\boxed{n=2}$

On peut donc poser $P = aX^2+bX+c \implies P''=2a$

$$X^2P''-2P=0 \iff 2aX^2-2(aX^2+bX+c)=0$$

$$\iff -2bX-2c=0 \iff \begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Les polynômes solutions sont donc les polynômes de la forme : $P = aX^2 \quad a\in\mathbb{K}$

$\boxed{\text{Exo 3}}$ **1°** Notons e l'élt neutre de G.

On a évidemment $e\in Z(G)$ car $\forall x\in G \quad x*e=e*x=x$

Soit $a,b\in Z(G)$, montrons que $a*b\in Z(G)$.

Soit $x\in G$, $(a*b)*x = a*(b*x) = a*(x*b) = (a*x)*b$

$= (x*a)*b = x*(a*b)$.

Donc $(a*b)$ commute avec x quelque soit $x\in G$.

$\implies (a*b)\in Z(G)$

Soit $a \in Z(G)$, Montrons que $a^{-1} \in Z(G)$

Soit $x \in G$, $a^{-1} * x = a^{-1} * (x^{-1})^{-1} = (x^{-1} * a)^{-1}$ car $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Or $a \in Z(G)$, donc a commute avec tout élément de G,

en particulier $x^{-1} * a = a * x^{-1}$

Donc $a^{-1} * x = a^{-1} * (x^{-1})^{-1} = (x^{-1} * a)^{-1} = (a * x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} * a^{-1}$

$= x * a^{-1}$

Donc a^{-1} commute avec x pour tout $x \in G$.

$\Rightarrow a^{-1} \in G$.

$Z(G)$ contient l'élt neutre de G, est stable par composition et stable par passage à l'inverse, donc c'est 1 sous-groupe.

2° Immédiat.

3° $f(x) = a * x$

* Soient $x, y \in G$ tq. $f(x) = f(y)$

alors $a * x = a * y \Rightarrow a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * a * y$

$\Rightarrow (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y$

$\Rightarrow e * x = e * y$

$\Rightarrow x = y$ f injective.

* Soit $y \in G$, $\exists x = a^{-1} * y \in G$ tq:

$f(x) = a * x = a * (a^{-1} * y) = (a * a^{-1}) * y = y$

f surjective donc bijective.

Exo 4 1° $\{f_1, f_2, f_3\}$ est déjà une famille génératrice de F

il reste à montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ fonction nulle

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x e^{-x} + \lambda_3 x^2 e^{-x} = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

La famille est bien libre donc c'est une base.

2° Soit $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$

Donc φ est linéaire.

3° $\varphi(f_1) = -f_1$ Car $f_1'(x) = -e^{-x}$

$\varphi(f_2) = f_1 - f_2$ Car $f_2'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = f_1(x) - f_2(x)$.

$\varphi(f_3) = 2f_2 - f_3$ Car $f_3'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$

Donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

4° a) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 3$.

b) $A = J - I_3$ immédiat.

c) $A^n = (J - I_3)^n$ et $J \times (-I_3) = (-I_3) \times J = J$

Donc on peut utiliser le binôme de Newton.

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k (-1)^{n-k} I_3.$$

$$= \binom{n}{0}(-1)^n J^0 + \binom{n}{1}(-1)^{n-1} J + \binom{n}{2}(-1)^{n-2} J^2$$

$$= (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} J^2$$

$$= (-1)^n \left[I_3 + n(-1)^{-1} J + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{-2} J^2 \right]$$

$$A^n = (-1)^n \left[I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \right] = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n & n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5°) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n) = [\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)]^n = A^n$

6°) a) $h^{(n)} = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}(h) = \varphi^n(h)$

Donc si H représente h dans $\mathcal{B}$, $A^n H$ représentera $\varphi^n(h) = h^{(n)}$.

b) $h(x) = (3 - 2x + 8x^2)e^{-x}$ sera représentée par : $H = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$A^n H = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n & n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 3 + 2n + 8(n-1)n \\ -2 + 16n \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A^n H = \begin{pmatrix} 8n^2 - 6n + 3 \\ 16n - 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Donc $h^{(n)}(x) = \varphi^n(h(x))$

$= (8n^2 - 6n + 3) f_1(x) + (16n - 2) f_2(x) + 8 f_3(x)$

$$h^{(n)}(x) = \left[8n^2 - 6n + 3 + (16n - 2)x + 8x^2 \right] e^{-x}$$