Corrigé Exam Analyse 2014

Exo 1

1° a) $h(x) = \arctan(x)$ $\quad D_h = \mathbb{R}$.

$\lim_{-\infty} h = -\pi/2$ $\quad \lim_{+\infty} h = +\pi/2$

$h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$

b) $h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$ $\quad$ et $h(0) = \arctan(0) = 0$

Donc $\arctan(x) = h(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

c) Posons $g(x) = \arctan(x) - x = h(x) - x$

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2} \leq 0$

donc g strict^t décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

$g(0) = 0$ donc $g(x) < 0$ $\quad \forall x > 0$.

càd $\arctan(x) < x$.

2° $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

a) $x \in D_f \iff 1+x \neq 0 \iff x \neq -1$ $\quad$ Donc $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

f est produit et composée de fonc. $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc $\mathcal{C}^\infty$.

b) i) $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{1}{1+x} = +\infty$, donc $\lim_{x \to -1^+} f(x) = (-1)^2 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \to -1^-} \dfrac{1}{1+x} = -\infty$, donc $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\pi/2$.

ii) $\arctan(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \Longrightarrow \arctan(x) \underset{0}{\sim} x$.

iii) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$, donc $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{1+x}$

On en déduit : $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{1+x} \underset{\pm\infty}{\sim} x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

iv) $\dfrac{x}{1+x} \underset{0}{=} x\left[1-x+x^2+o(x^2)\right] \underset{0}{=} x-x^2+x^3+o(x^3)$.

$$\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) \underset{0}{=} (x-x^2+x^3) - \frac{(x-x^2+x^3)^3}{3} + o\left((x-x^2+x^3)^3\right)$$

$$\underset{0}{=} x-x^2+x^3-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$ (Tous les autres termes sont de degré >3).

$$\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) = x-x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

v) $f(x) = x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) = x^2\arctan\left(\frac{1/x}{1+1/x}\right)$

Lorsque x est au voisinage de $\pm\infty$, $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0.
On peut donc utiliser le D.L. précédent en remplaçant x par $\frac{1}{x}$.

$$f(x) \underset{\pm\infty}{=} x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$\underset{\pm\infty}{=} x-1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = -1 \\ a_{-1} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

vi) On en déduit une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation : $y = x-1$.
La position est déterminée par le signe de $\frac{2}{3x}$.
Donc $\mathcal{C}_f$ au dessus de l'asymptote en $+\infty$
en dessous " " $-\infty$.

3° a) $f(x) = x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$.

$$f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + x^2\times\left(\frac{1}{1+x}\right)'\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}$$

$$= 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + x^2\times\frac{-1}{(1+x)^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}$$

$$= 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x^2}{(x+1)^2+1}$$

$$= x\left[2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{x^2+2x+2}\right] = x\,g(x)$$

avec $g(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{x^2+2x+2}$

$$g'(x) = 2\times\frac{-1}{(1+x)^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2} + \frac{-1(x^2+2x+2)+x(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \frac{-2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2-2}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+2x+2)+x^2-2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-(x^2+4x+6)}{\left[(x+1)^2+1\right]^2} < 0$$ car le numérateur n'a pas de racine ($\Delta<0$)

Donc g est strict^t décroissante.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{x^2+2x+2}$$

$$= 2\times 0 - 0 = 0$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $g(x)>0$.

$\boxed{\text{Exo 2}}$ $$f(t) = \frac{2t}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

(a) f = fraction rationnelle, donc continue sur son domaine de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

(b) Un seul pôle simple : 1.

$$\frac{2t}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}.$$

Multiplication par $(t-1)$ puis évaluation en 1.

$\rightarrow$ $a = 2/3$.

Multiplication par t^2+t+1 puis évaluation en $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2j}{j-1} = aj+b.$$

$$a\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+b = \frac{2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3-i\sqrt{3}}{3} = 1-i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit : $\begin{cases} -\frac{a}{2}+b=1 \\ a\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2/3 \\ b=2/3 \end{cases}$.

$$f(t)=\frac{2t}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{2/3}{t-1}+\frac{-2/3\,t+2/3}{t^2+t+1}$$

$$f(t)=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{t-1}+\frac{-t+1}{t^2+t+1}\right].$$

ⓒ $$\int\frac{2t}{(t-1)(t^2+t+1)}dt=\int\frac{2}{3}\left[\frac{1}{t-1}+\frac{-t+1}{t^2+t+1}\right]dt$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{1}{t-1}dt+\frac{2}{3}\int\frac{-\frac{1}{2}(2t+1)+3/2}{t^2+t+1}dt$$

$$=\frac{2}{3}\ln(|t-1|)-\frac{1}{3}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\int\frac{dt}{t^2+t+1}.$$

$$=\frac{2}{3}\ln(|t-1|)-\frac{1}{3}\ln(t^2+t+1)+\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2}{3}\ln(|t-1|)-\frac{1}{3}\ln(t^2+t+1)+\frac{4}{3}\int\frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$u=\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$

$du=\frac{2dt}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{2}{3}\ln(|t-1|)-\frac{1}{3}\ln(t^2+t+1)+\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{du}{u^2+1}$$

$$\int f(t)dt=\frac{2}{3}\ln(|t-1|)-\frac{1}{3}\ln(t^2+t+1)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right).$$

$\boxed{\text{Exo 3}}$ $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2}(a-u_n^2) \end{cases}$ $f(x)=x+\frac{1}{2}(a-x^2)$.

1° ⓐ $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=a.$

Si $a<0$ pas de solution

Si $a=0$ 1 seule solution $x=0$

Si $a>0$ 2 solutions $x=-\sqrt{a}$ ou $x=\sqrt{a}$.

(b) Si $a<0$, la suite est fortement divergente. Pas de limite finie possible.

Si $a=0$, $u_n = \text{cste} = 0$

Si $a>0$, il y a 2 limites éventuelles $-\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a}$.

Il faut étudier plus précisément les variations de $(u_n)_n$.

(2°) Si $a<0$, $u_{n+1}-u_n = +\frac{1}{2}(a-u_n^2) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}u_n^2 < 0$

$(u_n)_n$ est strictement décroissante, sans limite finie possible.

Donc $\lim u_n = -\infty$.

(3°) Si $a=0$, $u_0 = u_1 = u_n = 0$. $\lim u_n = 0$.

Si $a=4$, $u_0=0$; $u_1 = 2$; $u_2 = 0$; $u_3 = 2$

La suite est périodique de période 2 donc n'a pas de limite car les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ont des limites différentes 0 et 2.

(4°) $a=2$ $\quad f(x) = x + \frac{1}{2}(2-x^2) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

(a) $f'(x) = -x+1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$-\infty$

(b) Sur $[1,2]$, f est décroissante. donc

$f(2) \leq f(x) \leq f(1) \iff +1 \leq f(x) \leq 3/2 \leq 2$.

Donc $x \in [1,2] \implies f(x) \in [1,2]$.

$u_1 = f(u_0) = 1 \in [1,2]$.

$u_n \in [1,2] \implies u_{n+1} = f(u_n) \in [1,2]$ $\Big\}$ Récurrence.

Donc $\forall n \geq 1$ $\quad u_n \in [1;2]$.

c) $(u_n-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}(u_n+\sqrt{2})-1\right) = (u_n-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}u_n+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$

$= \frac{1}{2}u_n^2 + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}u_n} - u_n - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}u_n} - 1 + \sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}u_n^2 - u_n - 1 + \sqrt{2}$

$= -\left[-\frac{1}{2}u_n^2 + u_n + 1 - \sqrt{2}\right]$

$= -\left[u_{n+1} - \sqrt{2}\right]$.

Donc on peut passer à la valeur absolue et obtenir :

$$|u_{n+1}-\sqrt{2}| = |u_n-\sqrt{2}| \times \left|\frac{1}{2}(u_n+\sqrt{2})-1\right|$$

Par ailleurs, on a vu que $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 1+\sqrt{2} \leq u_n+\sqrt{2} \leq 2+\sqrt{2}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(u_n+\sqrt{2}) - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\left|\frac{1}{2}(u_n+\sqrt{2})-1\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où le résultat : $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |u_n-\sqrt{2}|$

d) Récurrence sur $n \geq 1$.

$\underline{n=1}$ $|u_1-\sqrt{2}| = |1-\sqrt{2}| \leq \sqrt{2}$

Hérédité : $|u_n-\sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\sqrt{2}$

$\Rightarrow |u_{n+1}-\sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\sqrt{2}$

$|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leq \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}$.

e) $\lim u_n = \sqrt{2}$

Exo 4 $(1-x^2)y' + xy = P(x)$ (E_P)

$$(1-x^2)y' + xy = 0. \quad (E_0)$$

1° Pour résoudre (E_0), on doit la réécrire :

$$y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = 0.$$

Elle aura des solutions sur chaque intervalle où $a(x) = \frac{x}{1-x^2}$ est définie.

Donc sur $]-\infty, -1[$; $]-1, 1[$; $]1, +\infty[$

2° $A(x) = \int a(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)$
$= -\ln\sqrt{|1-x^2|}$

La solution générale de (E_0) sera donc :

$$y_H(x) = \lambda \exp(-A(x)) = \lambda\sqrt{|1-x^2|}.$$

3° a) Sur $]-1;1[$, la sol. de l'éq. homogène est : $y_H = \lambda\sqrt{1-x^2}$

La méthode de variation de la constante ~~pour~~ déterminer une solution particulière donne :

$y_0 = \lambda(x)\sqrt{1-x^2}$ et l'équation devient :

$$\lambda'(x)\sqrt{1-x^2} = 1 \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

on doit reconnaître la dérivée de l'arcsinus.

Donc $\lambda(x) = \arcsin(x)$ donnera 1 solution particulière : $y_0(x) = \arcsin(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$

La solution de (E_{P_1}) sur $]-1,1[$ est donc :
$$y = [\lambda + \arcsin(x)]\sqrt{1-x^2}$$

Sur $]-\infty,-1[$ ou sur $]1,+\infty[$

$$y_H = \lambda\sqrt{x^2-1}.$$

La méthode de la variation de constante donne :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$ on doit y reconnaître

la dérivée de argch : argument cosinus hyperbolique

fonction réciproque ~~des~~ cosinus hyperbolique ch.

Que l'on peut aussi retrouver en faisant le changement de variable : $x = ch(t)$.

donc $\lambda(x) = argch(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

donne 1 solution particulière.

$$y_0(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \times \sqrt{1-x^2}.$$

Sol. générale de (E_{P_1}) :

$$y = \left[\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + \lambda\right]\sqrt{1-x^2}.$$

(b) Sur $]-1,1[$: $y = [\lambda + \arcsin(x)]\sqrt{1-x^2}$

$y(0)=0 \Longrightarrow y(x) = f_1(x) = \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}.$

(c) $DL_3(0)$ de f_1 :

$$f_1(x) = \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2} \underset{0}{=} 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)(-x^2) + o(x^2).$$

$$\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc $\arcsin(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, on multiplie

$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

$f_1(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3.$