Corrigé DS 8

Exo 1

1° a) On suppose $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$ libre, on veut montrer $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$

On applique $f \Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = f(0_E) = 0_E$.

$\rightarrow \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_E$

Or $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

cqfd.

b) $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$ génératrice $\Rightarrow E = \mathrm{Vect}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.

Donc $E = \mathrm{Im}(f)$, f surjective et E de dimension finie $\leq n$

Donc f injective, par suite bijective (automorphisme).

On peut trouver une sous-famille libre de $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ qui sera donc une base de E. On applique f^{-1} (qui existe parce que f est bijective) ce qui donne une base de E qui est une sous-famille de $(v_1, \dots, v_n)$. Donc $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice.

2° $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

BA existe si et ssi $r = n$.

3° AB existe $\Leftrightarrow p = q$

BA existe $\Leftrightarrow r = n$

$A+B$ existe $\Leftrightarrow n = q$ et $p = r$

L'implication est fausse.

$A = (1, 2)$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$AB = (11)$ $\quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Mais $A + B$ n'existe pas !!

Problème 1

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \longmapsto \text{reste de la division de } P \text{ par } (X^2+1).$$

1° Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On sait que $P_1 = (X^2+1)Q_1 + f(P_1)$
$P_2 = (X^2+1)Q_2 + f(P_2)$ avec $\deg(f(P_1)) < 2$
$\deg(f(P_2)) < 2$

On en déduit $\lambda P_1 + \mu P_2 = (X^2+1)(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$

et $\deg(\lambda f(P_1) + \mu\, f(P_2)) \leq \operatorname{Max}(\deg(\lambda f(P_1)), \deg(\mu f(P_2)))$
< 2

Donc $\lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ est le reste de la division euclidienne de $(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par (X^2+1).

C'est à dire : $\lambda f(P_1) + \mu f(P_2) = f(\lambda P_1 + \mu P_2)$.

f est 1 application linéaire !!

2° $P \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff$ Reste de la division euclidienne de P par $(X^2+1) = 0$

$\iff P = (X^2+1)\,Q$ avec $\deg(Q) \leq 1$ car $\deg(P) \leq 3$
donc $Q \in \mathbb{R}_1[X]$

$\iff P \in M$ Donc $\operatorname{Ker}(f) = M$.

3° $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P)$ de degré $< 2 \implies f(P) \in \mathbb{R}_1[X]$.
$\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}_1[X]$.

Si $R \in \mathbb{R}_1[X]$, alors $R \in \mathbb{R}_3[X]$.
La division euclidienne de R par (X^2+1) donne un quotient nulle et un reste $= R$ donc $R = f(R)$, $R \in \operatorname{Im}(f)$

Conclusion $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

On peut aussi raisonner sur les dimensions (théo. du rang).

4° $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ non injective.

$\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow f$ non surjective.

5° Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on sait que $\deg(f(P)) < 2$ donc sa division euclidienne par (X^2+1) donne un quotient $= 0$ et un reste $= f(P)$.

Autrement dit $f[f(P)] = f(P)$.

$f \circ f = f \Rightarrow f$ est un projecteur.

6° $M = \{(X^2+1)Q,\ Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$.

$0 = (X^2+1) \times 0 \Rightarrow 0 \in M$.

Soit $P_1, P_2 \in M$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$P_1 = (X^2+1)Q_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}_1[X]$.

$P_2 = (X^2+1)Q_2$ " Q_2 "

$\Rightarrow \lambda P_1 + \mu P_2 = (X^2+1)(\lambda Q_1 + \mu Q_2)$

et $(\lambda Q_1 + \mu Q_2) \in \mathbb{R}_1[X]$.

Donc M est un sous-esp. vect. de $\mathbb{R}_3[X]$.

7° * Soit $P \in M \cap \mathbb{R}_1[X]$, alors $P = (X^2+1)Q$ et $\deg(P) < 2$.

Or si $Q \neq 0$, $\deg(P) = \deg(X^2+1) + \deg(Q) \geq 2$

Donc on a forcément $Q = 0$

$M \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$, M et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.

* Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, la division euclidienne de P par (X^2+1) donne : $P = (X^2+1)Q + f(P) = S_1 + S_2$

avec $S_1 = (X^2+1)Q \in M$ et $S_2 = f(P) \in \mathbb{R}_1[X]$

donc $M + \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}_3[X]$.

Finalement : $\mathbb{R}_3[X] = M \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

8° La décomposition précédente indique : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$,
$\exists ! (S_1, S_2) \in M \times \mathbb{R}_1[X]$ / $P = S_1 + S_2$
et $f(P) = S_2$.

Donc f = projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à M.

La projection sur M parallèlement à $\mathbb{R}_1[X]$ est donnée par :

$$g(P) = (Id - f)(P) = P - f(P) = S_1.$$

9° Toujours avec la même notation, si on note h, la symétrie par rapport à $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à M, on a :

$$h(P) = S_1 - S_2 = S_1 + S_2 - 2S_2 = P - 2f(P)$$
$$= Id(P) - 2f(P) = (Id - 2f)(P).$$

Donc $h = Id_{\mathbb{R}_3[X]} - 2f$.

$\boxed{\text{Exo 2}}$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (-x - 6y + 6z, 5y - 6z, 3y - 4z).$$

1° $$\begin{pmatrix} -x - 6y + 6z \\ 5y - 6z \\ 3y - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ou bien : les vecteurs de la base canonique : $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,1,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = f(1,0,0) = (-1,0,0) \rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ colonne} \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (-6,5,3) \Rightarrow 2^{\text{e}} \text{ colonne.} \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (6,-6,-4) \Rightarrow 3^{\text{e}} \text{ colonne.} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2°) $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-6y+6z=0 \\ 5y-6z=0 \\ 3y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$.

3°) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ et théo du rang $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$

$\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

$\mathrm{rang}(f) = 3$.

4°) $v_1 = (3,2,2)$; $v_2 = (1,1,1)$; $v_3 = (-2,2,1)$

a) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ de dimension $= 3$.

C'est donc 1 base.

b) $f(v_1) = f(3,2,2) = (-3-6\times2+6\times2,\ 5\times2-6\times2,\ 3\times2-4\times2)$

$= (-3,-2,-2) = -v_1$.

$f(v_1) = -1.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3$

$f(v_2) = f(1,1,1) = (-1-6+6,\ 5-6,\ 3-4) = (-1,-1,-1) = -v_2$.

$f(v_2) = 0.v_1 + (-1).v_2 + 0.v_3$.

$f(v_3) = f(-2,2,1) = (2-6\times2+6,\ 5\times2-6,\ 3\times2-4) = (-4;4;2)$

$f(v_3) = 2v_3 = 0.v_1 + 0.v_2 + 2.v_3$.

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $C^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Problème 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1°

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc la famille $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2)$ est libre formée de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ avec $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est 1 base de $\mathbb{R}^2$.

2°

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 = 1.e_1 + 0.e_2$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e_2 = 0.e_1 + 2.e_2.$$

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3°

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$P P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

4°

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5° $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

6° $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$

Hérédité : Supposons $A^n = PD^nP^{-1}$.

Alors : $A^{n+1} = A^n \times A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1})$

$= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1}$

$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

7° $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2^n & -2^n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 2-2^{n+1} \\ -1+2^n & 2-2^n \end{pmatrix}$

8° $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1+2^{2+1} & 2-2^{2+1} \\ -1+2^2 & 2-2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+8 & 2-8 \\ -1+4 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1+2^{3+1} & 2-2^{3+1} \\ -1+2^3 & 2-2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+16 & 2-16 \\ -1+8 & 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$