EISTI Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information	**ING2-MI : EXAMEN DE SIMULATION ET PROCESSUS STOCHASTIQUES**

Rédigé par : Hervé de Milleville	Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*
A l'intention de : Etudiants des ING2-MI	Créé le : 13/02/2012

Préambule

Cet examen dure 1h30. Le rendu de l'examen est une copie papier. Pendant cette épreuve, seuls les documents papiers sont autorisés et votre pc en local.

Estimation d'une surface par simulation (6 pts)

On considère une fonction f définie sur [a, b] bornée et à valeurs positives.

- Montrer qu'en simulant des points dans le rectangle $[a,b]\times\left[0,\max\limits_{[a,b]} f\right]$, on peut estimer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. (3 pts)

  Solution : $\int_a^b f(t)dt$ *est l'aire de la surface S délimitée par l'axe des x et la courbe d'une part les deux droites x = a et x = b d'autre part. En simulant n points (avec n assez grand) dans le rectangle* $[a,b]\times\left[0,\max\limits_{[a,b]} f\right]$*, et en notant* r_n *le nombre de fois où on est tombé dans la surface définie ci-dessus alors le rapport* r_n/n *est une approximation de la probabilité qu'un point pris au hasard dans le rectangle* $[a,b]\times\left[0,\max\limits_{[a,b]} f\right]$ *appartienne à la surface. En conclusion, on peut approximer cette surface S en multipliant le rapport* r_n/n *par la surface du rectangle, soit* $(r_n/n).(b-a).(\max f)$*.*
- En déduire un algorithme qui permet par simulation de calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^\pi \sin(t)dt$. (3 pts)

Simulation de loi de Rayleigh (4 pts)

La hauteur maximale de la crue annuelle d'une rivière peut être modélisée par une variable aléatoire X de loi de Rayleigh de paramètre θ>0, c'est-à-dire avec la fonction de répartition,

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} & t\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Lorsque la crue atteint un niveau critique un dispositif d'alerte est enclenché.

- Expliquer comment simuler une loi de Rayleigh par la méthode d'inversion de la fonction de répartition. (2 pts)

  Solution : $\left.\begin{array}{l} u = F(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} \Leftrightarrow e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}} = 1 - u \Leftrightarrow -\dfrac{t^2}{2\theta^2} = \ln(1-u) \\ \Leftrightarrow t^2 = -2\theta^2.\ln(1-u) \Leftrightarrow t = \sqrt{-2\theta^2.\ln(1-u)} \end{array}\right\}$ *Donc pour simuler une loi de Rayleigh, on simule (comme d'habitude) une réalisation u d'une variable uniforme sur [0,1] et on renvoie la valeur* $t = \sqrt{-2\theta^2.\ln(1-u)}$. *Pour la suite, on notera simulRayleigh cette fonction qui permet de simuler une loi de Rayleigh.*

- Ecrire un algorithme permettant d'estimer la probabilité que le dispositif d'alerte soit enclenché. (2 pts)

  Solution :

```
Fonction estimerProbaAlerte(theta : Reel, seuil : Reel) : Reel
n : Entier
cpt : Reel

n ← 10000
cpt ← 0.0
Pour i ← 1 à n pas 1
    Si simulRaleigh() > seuil Alors
            cpt ← cpt + 1.0
    Fin Si
Fin Pour
retourner cpt / n
Fin Fonction
```

Loi exponentielle et loi de Poisson (10 pts)

On note X_n un processus qui représente les instants d'arrivées à un arrêt d'autobus.
Ce processus vérifie les propriétés suivantes :

1. $X_0 = 0$
2. $\forall\ n \geq 0$, $X_{n+1} - X_n$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
3. $\forall\ q > p \geq\ n > m \geq 0$, les variables aléatoires $X_q - X_p$ et $X_n - X_m$ sont indépendantes.

On considère deux réels t, s tels que t > s et on note N(s,t) la variable qui compte le nombre d'arrivées à l'arrêt d'autobus dans l'intervalle de temps [t , s].

Théorème : Sous les propriétés ci-dessus, la variables N(s,t) suit une loi de Poisson. On veut vérifier empiriquement ce théorème.

1. Ecrire un algorithme qui simule le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps [t, s] (4 pts)
2. Soient n et m deux nombres entiers strictement positifs. Ecrire un algorithme qui estime (par simulation) les probabilités $P(N(s,t) = i)$ $\forall$ $i \leq n$. Afin de s'assurer que $\forall$ $i \leq n$, l'estimation de la probabilité $P(N(s,t) = i)$ est suffisamment précise, on impose que le nombre minimum de réalisations de l'évènement $\{ N(s,t) = i \}$ est supérieur ou égal à m. (6 pts)