EISTI Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information	**ING2-MI : EXAMEN DE SIMULATION ET PROCESSUS STOCHASTIQUES**
Rédigé par : Astrid Jourdan et Hervé de Milleville	Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*
A l'intention de : Etudiants des ING2-MI	Créé le : 09/01/2012

1. Préambule

Cet examen dure 1h30. Le rendu de l'examen est une copie papier. Pendant cette épreuve, seuls les documents papiers sont autorisés et votre pc en local.

2. Questions de réflexion

- Question 1) En simulation, quel est le lien entre une variable uniforme sur [0,1] et l'inverse d'une fonction de répartition ? (1pt)
- Question 2) Pour simuler une variable gaussienne, on peut utiliser le résultat du TCL. Pourquoi est-il préférable d'utiliser des variables X_n dont la densité est symétrique par rapport à une valeur ? (1 pt)
- Question 3) Pour simuler une variable gaussienne, on a vu deux méthodes : le TCL et la méthode de Box-Müller. En quoi la deuxième méthode est plus intéressante ? (1 pt)

3. Simulation de probabilités

Dans ce qui suit la fonction Random{1, …, 6} simule une variable uniforme discrète sur l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

On considère les deux algorithmes suivants :

<u>Algorithme 1 (3pts)</u>

```
compteur ← 0
Répéter 1000 fois
   D ← Random{1,…,6}
   Si D ≥ 4 et D pair alors
      Compteur ← compteur+1
   FinSi
FinRépéter
f1 ← compteur/1000
```

<u>Algorithme 2 (3 pts)</u>

```
compteur ← 0
Répéter 1000 fois
   Répéter
      D ← Random{1,…,6}
   Jusqu'à (D pair)
   Si D≥4 alors
      compteur=compteur+1
   FinSi
FinRépéter
f2 ← compteur/1000
```

Quelles probabilités (théoriques) les fréquences f1 et f2 estiment-elles ? On doit justifier sa réponse.

4. Simulation de l'évolution d'une population

On considère l'évolution d'une population à des instants 0,1,…,n,n+1,… discrets. Notons X_n la taille de cette population à l'instant n. On sait que la taille de la population à l'instant n+1 ne dépend que de la taille à l'instant n à laquelle on ajoute le nombre de naissances et on soustrait le nombre de morts.

- Notons M_n la variable aléatoire représentant le nombre de morts à l'instant n. On suppose que
$$M_n=(2X_n-Z)_+$$
où $(x)_+ = x$ si $x>0$ et $(x)_+ = 0$ si $x<0$ et Z est une variable aléatoire de loi binomiale négative (voir la loi en annexes) de paramètres $bn(X_n,p)$ où $p\in]0,1[$.
- Notons N_n la variable aléatoire représentant le nombre de naissances à l'instant n. On suppose que N_n suit une loi géométrique $G(1/X_n)$ (voir la loi en annexes).

1) Donner les algorithmes permettant de simuler le nombre de naissances (2 pts + 1pt) et de morts en utilisant un schéma d'urnes (4 pts).
2) Donner l'algorithme permettant de simuler l'évolution de cette population (4 pts).

5. Annexes

5.1 Loi binomiale négative

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à répéter de façon indépendante une expérience admettant deux résultats : un succès avec une probabilité p ou un échec avec une probabilité 1-p (Bernoulli) et à compter le nombre de répétitions nécessaires avant d'avoir c succès. Alors à cette expérience on associe une variable aléatoire discrète de loi binomiale de paramètres $c\in N$ et $p\in]0,1[$, notée bn(c,p). Cette variable est définie par

$$P[X=k]=C_{k-1}^{c-1}p^c(1-p)^{k-c} \quad , \forall k\in\{c,c+1,\ldots,+\infty\}$$

L'espérance et la variance sont données par

$$E(X)=\frac{c}{p} \text{ et } \sigma^2=\text{var}(X)=\frac{c(1-p)}{p^2}.$$

5.2 Loi géométrique

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p et celle d'échec q = 1 - p. On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu'au premier succès. On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès. Cette loi a pour nom loi géométrique.

$$p(X=k) = q^{k-1}p.$$