EISTI Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information	**ING2-MI : EXAMEN DE SIMULATION ET PROCESSUS STOCHASTIQUES**

Rédigé par : Hervé de Milleville	Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*
A l'intention de : Etudiants des ING2-MI	Créé le : 05/11/2013

Préambule

Cet examen dure 1h30. Le rendu de l'examen est une copie papier. Pendant cette épreuve, seuls les documents papiers sont autorisés et votre pc en local.

Estimation d'une surface par simulation (2 pts)

On a vu en travaux dirigés comment calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction positive bornée par simulation.

- Comment peut-on adapter l'algorithme pour calculer $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction quelconque bornée par simulation ?

Processus de Poisson : questions de réflexion (2 pts)

1) Une partie de la définition d'un processus de Poisson est donnée par $\begin{cases} P(N_{t+h}-N_t = 1) = \lambda h + o(h) \\ P(N_{t+h}-N_t > 1) = o(h) \end{cases}$.

   D'après vous, pourquoi appelle-t-on cette partie : "évènements rares" ?
2) Le processus de Poisson permet de définir un lien très fort entre une variable de Poisson et une variable exponentielle. Lequel ?

Simulation d'un tirage à la corde (8 pts)

On considère deux équipes qui s'opposent dans une épreuve de tirage à la corde. On suppose que la force de tension de la première équipe est un processus stochastique $(X_t)_{t\in R^+}$ où $X_t \longrightarrow N(m_1,\sigma_1^2)$ et que la force de tension de la deuxième équipe est un processus stochastique $(Y_t)_{t\in R^+}$ où $Y_t \longrightarrow N(m_2,\sigma_2^2)$. Au début de la partie, le premier de cordée de chaque équipe se trouve à une distance d d'une ligne rouge. La première équipe dont le premier de cordée franchit cette ligne a perdu. Pour simplifier, on suppose que :

$$\forall t_1 \text{ et } t_2 \text{ avec } t_1 \neq t_2 \begin{cases} X_{t_1} \text{ et } X_{t_2} \text{ sont indépendantes} \\ Y_{t_1} \text{ et } Y_{t_2} \text{ sont indépendantes} \end{cases}$$

1) (5 pts) On vous demande d'écrire l'algorithme qui permet de simuler une partie de tirage de corde. Cet algorithme devra se présenter sous forme d'une procédure qui recevra les bons paramètres. Comme on ne sait pas simuler une infinité continue de temps t, on va discrétiser le temps : on fixe une très petite valeur Δ_t et on simulera les valeurs $X_{\Delta_t}, X_{2.\Delta_t}, \dots, X_{n.\Delta_t}$ d'une part et $Y_{\Delta_t}, Y_{2.\Delta_t}, \dots, Y_{n.\Delta_t}$ d'autre part. Enfin, on supposera qu'à tout instant t, si on note f_t la force à laquelle est soumise une équipe alors elle se déplace de $k.f_t$ où k est une constante donnée.

2) (3 pts) On suppose maintenant qu'à tous les instants n.T (n un nombre entier et T un valeur réelle fixée), la force moyenne d'une équipe diminue ce qui se traduit par un changement de la valeur m_i (i = 1 et i = 2) à l'aide de la formule $m_i = \rho.\ m_i$ où $\rho \in]0,1[$. Adapter l'algorithme ci-dessus.

Processus de vie et de mort (10 pts)

On observe tous les mois les créatures vivantes d'un environnement. On note X_n (n indice de mois) le nombre de créatures vivantes à la fin du mois n. On suppose que le nombre de naissances pendant le mois n suit une variable de Poisson de paramètre proportionnel X_{n-1} tel que $\lambda = 0,1(X_{n-1})$. De même, on suppose le nombre de morts suit une variable de Poisson de paramètre proportionnel X_{n-1} tel que $\lambda = 0,02(X_{n-1})$ en tenant compte qu'on ne peut pas avoir plus de morts que de créatures vivantes au début du mois. Le nombre de morts est supposé indépendant du nombre de naissances dans le même mois. A l'instant 0, on place m créatures vivantes dans l'environnement.

1) (1 pt)Trouver les valeurs possibles du processus $(X_n)_{n\in N}$.
2) (1 pt) Montrer que $(X_n)_{n\in N}$ est une chaîne de Markov homogène.
3) (2pts) Calculer toutes les transitions $P(X_n = k_2 / X_{n-1} = k_1)$.
4) (2pts) Trouver les classes récurrentes et les classes transitoires.
5) (4 pts) Ecrire l'algorithme qui permet de simuler ce processus jusqu'à l'instant n donné.