EISTI	**ING2-MI : EXAMEN DE RATTRAPAGE DE SIMULATION ET PROCESSUS STOCHASTIQUES**

Rédigé par : Hervé de Milleville	Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*
A l'intention de : Etudiants des ING2-MI	Créé le : 16/02/2014

Préambule

Cet examen dure 1h30. Le rendu de l'examen est une copie papier. Pendant cette épreuve, seuls les documents papiers sont autorisés et votre pc en local.

Simulation de trafic

On étudie le flot de voitures à une borne d'observation d'une autoroute dans une plage horaire donnée pour prévoir l'arrivée de bouchons. On note *hd* et *hf* les heures de début et de fin de la plage horaire. On suppose que le nombre de voitures passant devant la borne d'observation dans l'intervalle $[hd+\alpha, hd+\alpha+\Delta x]$ est une variable de poisson de paramètre $\lambda = k..\alpha.\Delta x$ où k est une constante positive donnée, α un nombre dans l'intervalle $[0, hf-hd]$ et Δx un nombre proche de 0.

1) Expliquer pourquoi le trafic aura tendance à augmenter dans l'intervalle de temps $[hd, hf]$
2) Ecrire l'algorithme qui permet de simuler le trafic dans l'intervalle de temps $[hd, hf]$. Cet algorithme doit fournir sur une série d'instants (à définir) le flot de voitures passées devant la borne entre les instants t_i et t_{i+1}.
3) Aux abords des tunnels des autoroutes de montagne, on arrête le trafic (avec une barrière) quand ce dernier est supérieur à une valeur donnée. Adapter l'algorithme ci-dessus pour prendre en compte cette contrainte.

Processus de Poisson : questions de réflexion

Il y a deux propriétés essentielles dans la définition d'un processus de Poisson :

a) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$.
b) $P(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h)$

1) Pour chacune de ces propriétés, expliquer leur signification précise.
2) On remplace la propriété a) par $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h^2 + o(h)$. Quel impact à ce changement dans l'évolution du processus N_t ?

Chaîne de Markov

On définit le jeu suivant :

- Ce jeu est composé de deux joueurs.
- Au début, on donne à chaque joueur une urne contenant 50 boules blanches et 50 boules noires.
- Une étape du jeu consiste pour chaque joueur à tirer une boule dans son urne :
  - Si les deux joueurs ont tiré des boules de même couleur, l'étape est nulle et chaque joueur remet sa boule dans son urne.
  - Si les deux joueurs ont tiré des boules de couleurs différentes alors celui qui a tiré une boule blanche donne sa boule à l'autre joueur qui met les deux boules dans son urne.
- Le jeu se termine quand un joueur n'a plus de boule.

A la n^{ième} étape, on note X_n =(No_n , Bl_n) le couple du nombre de boules noires et de boules blanches contenues dans l'urne du 1er joueur.

1) Montrer que $(X_n)_{n\in N}$ est une chaîne de Markov homogène.
2) Quels sont ces différents états ?
3) Trouver les classes récurrentes et transitoires.
4) Est-elle ergodique ?
5) Pourquoi l'étude seule de No_n est insuffisante pour établir des propriétés de ce jeu ?