EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

RATTRAPAGE D'ANALYSE NUMÉRIQUE – GM

23 juin 2015 – **DURÉE 3h00**

La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.
L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour le brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM: ....

NOTE

DÉTAIL

	1	2	3	4	5	6	7
Exercice 1.							
Exercice 2.							
Exercice 3.							
Exercice 4.							
Exercice 5.							
Exercice 6.							

NOM: ....

Notations.- *On note par des caractères majuscules gras des matrices, par des caractères minuscules gras des vecteurs colonne et par des caractères minuscules normaux des scalaires.*

Analyse des erreurs

Exercice 1.
Pour cet exercice, on utilisera la méthode d'arrondi au plus près recommandée par la norme IEEE-754.

Soit la valeur décimale 13.625.

1. Donner sa représentation en binaire de cette valeur.

2. Donner sa représentation binaire sous forme normalisée.

3. Donner le codage selon le standard IEEE 754 de cette valeur.

NOM: ....

Exercice 2.

L'opération $c = a^3b(a - b)$ peut s'effectuer selon l'algorithme suivant :

$x \leftarrow a^3$
$y \leftarrow x \times b$
$z \leftarrow a - b$
$c \leftarrow y \times z$

Cet algorithme est-il numériquement stable ? Justifier votre réponse.

NOM: ....

NOM: ....

Algèbre linéaire numérique

Exercice 3.-

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode de calcul itératif de la matrice inverse.

Considérons la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ partionnée en blocs comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{A}_{ij} \in R^{k_i \times l_j}; i, j = 1, 2$, où k_i, l_j sont tels que

$$n = k_1 + k_2$$

$$l_i = k_i; i = 1, 2$$

On suppose que les matrices $\mathbf{A}, \mathbf{A}_{11}$ sont inversibles (régulières).

Dans la suite on notera $\mathbf{I}_n$ la matrice identité de dimension n et par $\mathbf{0}$ la matrice ou le vecteur – de dimensions adaptées – dont tous les termes sont nuls.

1. On forme la matrice

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k_1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{l_2} \end{bmatrix}$$

   Montrer que cette matrice est inversible.

NOM: ....

2. On forme la matrice

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_{k_1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l_2} \end{array} \right]$$

Montrer que cette matrice est inversible.

NOM: ....

3. On forme la matrice

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$$

   Calculer le produit

$$\mathbf{EAF}$$

   en faisant des multiplications par blocs.

NOM: ....

4. En déduire que $\mathbf{S}$ est inversible.

5. Donner l'expression de $\mathbf{A}^{-1}$ en fonction de $\mathbf{A}_{11}^{-1}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ et $\mathbf{S}^{-1}$.

NOM: ....

6. Sous quelles conditions, concernant la matrice $\mathbf{A}$, l'expression de $\mathbf{A}^{-1}$ peut permettre le calcul itératif de l'inverse de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en commençant par la sous-matrice $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$? Justifier votre réponse.

7. Application :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Étant donné que l'inverse de $\mathbf{A}_{11}$ est

$$\mathbf{A}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculer, en utilisant l'expression trouvée à la question 4, l'inverse de $\mathbf{A}$ et vérifier le résultat.

NOM: ....

NOM: ....

Matrices creuses

Exercice 4.-
Soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 7 & 42 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 9 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la largeur de bande de $\mathbf{A}$?

NOM: ....

2. Trouver une permutation des variables permettant de réduire la largeur de bande $\mathbf{A}$ de deux unités.

NOM: ....

Localisation des valeurs propres

Exercice 5.
Soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le nombre maximal de valeurs propres complexes non réelles de A.

NOM: ....

2. Montrer que $\kappa_2(A) \leq 24$.

NOM: ....

Valeurs singulières, pseuso-inverse et moindres carrés

Exercice 6.

On considère un composé radioactif. On sait que le nombre d'isotopes radioactifs à l'instant t, noté $N(t)$, suit la loi d'évolution

$$\forall t \geq 0,\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t) = -\lambda N(t)$$

où λ est la constante radioactive du composé.

On sait que la valeur de $N(t)$ est donnée par la relation

$$\forall t \geq 0,\ N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

On dispose d'une mesure des isotopes radioactifs du composé $N_1, N_2, \ldots, N_p$ aux instants $t_1, t_2, \ldots t_p$.
Formuler la recherche de la constante radioactive λ et du nombre initial $N_0 = N(0)$ d'isotopes radioactifs sous la forme d'un problème aux moindres carrés linéaire.