Ex 1

1) $0.045 = 0.00001011110000101\ldots$

$= 0.10111000 \cdot 2^{-4}$

$11.2 = (1+2+8) + 0.2$

$= 1011.0011001100\ldots$

$= 0.10110011 \quad 2^{4}$

$\frac{2}{3} = 0.\cancel{0}1010101010\ldots$

$= 0.10101010 \quad 2^{0}$

$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

$= 1 + 0.0101010101\ldots$

$= 1.0101010101\ldots$

$= 0.10101010 \quad 2^{1}$

2) $x_{min} = 0.1 \quad 2^{-7} \approx 0.004$

$x_{max} = 0.11111111 \quad 2^{7} = 127.5$

3) Le triplet (s, M, n) représente tous les réels x tels que

$$x = s.(0.b_1 \ldots b_m b_{m+1} \ldots\ldots)\, 2^{n}$$

càd $\cancel{|x|} = \cancel{0.}\ \frac{x}{2^n} = s.\left(M + 0.b_{m+1} b_{m+2} \ldots\ 2^{-(m+1)}\right)$

Soit $\frac{sx}{2^n} = M + 0.b_{m+1} b_{m+2} \ldots\ 2^{-(m+1)}$

Nous avons donc

$$M \leq \frac{sx}{2^n} < M + 2^{-(m+1)}$$

4) $m(x) = s M 2^n$

Prenons $s = 1$ (le raisonnement pour $s = -1$ est analogue)

$$s M 2^n \leq x < s\left(M + 2^{-(m+1)}\right) 2^n$$

$$0 \leq x - m(x) < 2^{n-(m+1)}$$

Au pire nous avons donc

$$\frac{x - m(x)}{x} \leq 2^{-\{m\cancel{+1}}$$

Exercice 2

1) $m(bc) = bc(1+\varepsilon_*)$

$$m(a+bc) = (a+bc(1+\varepsilon_*))(1+\varepsilon_+)$$
$$= (a+bc+bc\,\varepsilon_*)(1+\varepsilon_+)$$
$$= a+bc+(a+bc)\varepsilon_+ + bc\,\varepsilon_*$$

(en ne gardant que les termes du 1er degré)

$$E = m(a+bc) - (a+bc)$$
$$= (a+bc)\varepsilon_+ + bc\,\varepsilon_*$$

2) $m(ab) = ab(1+\varepsilon_*)$

$$m(cd) = cd(1+\varepsilon_*)$$
$$m(ab+cd) = ((ab+cd)(1+\varepsilon_*))(1+\varepsilon_+)$$
$$= (ab+cd)(1+\varepsilon_*+\varepsilon_+)$$

$$E = m(ab+cd) - (ab+cd)$$
$$= (ab+cd)(\varepsilon_*+\varepsilon_+)$$

3. On suppose pour simplifier $\varepsilon_* = \varepsilon_+ = \varepsilon$

$P_1 = x_1 y_1$

$S_1 = P_1$

$m(S_1) = x_1 y_1 (1+\varepsilon)$

$P_2 = x_2 y_2 \qquad m(P_2) = x_2 y_2 (1+\varepsilon)$

$S_2 = S_1 + P_2 \qquad m(S_2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)(1+\varepsilon)^2$

$P_3 = x_3 y_3 \qquad m(P_3) = x_3 y_3 (1+\varepsilon)$

$S_3 = S_2 + P_3 \qquad m(S_3) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)(1+\varepsilon)^3 + x_3 y_3 (1+\varepsilon)^2$

Plus generalement nous allons trouver

$$m(S_n) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)(1+\varepsilon)^n + x_3 y_3 (1+\varepsilon)^{n-1} + \cdots + x_n y_n (1+\varepsilon)^2$$

Deuxieme algorithme

$P_1 = x_1 y_1 \quad - \quad m(P_1) = x_1 y_1 (1+\varepsilon)$

$P_2 = x_2 y_2 \quad - \quad m(P_2) = x_2 y_2 (1+\varepsilon)$

$\vdots \qquad \vdots$

$P_n = x_n y_n \qquad m(P_n) = x_n y_n (1+\varepsilon)$

On regroupe 2 par 2

$$S_{12} = P_1 + P_2$$

$$m(S_{12}) = (x_1y_1 + x_2y_2)(1+\varepsilon)^2$$

$\vdots$

On regroupe 4 par 4

$$S_{1-4} = (P_1+P_2)+(P_3+P_4)$$

$$m(S_{1-4}) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)(1+\varepsilon)^3$$

A la fin

$$S_{1-n} = (P_1 + \dots + P_{n/2}) + (P_{n/2+1} + \dots + P_n)$$

$$= (x_1y_1 + \dots + x_ny_n)(1+\varepsilon)^{\log n + 1}$$

Cet algorithme génère donc moins d'erreurs que le premier.

Exercice 3

1) Pour éliminer l'inconnue x_1 des equations 2, 3 et 4. Nous devons faire successivement

$$L_2 = L_2 + 2L_1$$

$$L_3 = L_3 - 2L_1$$

Nous obtenons

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Pour obtenir A_1, nous avons multiplie A successivement par

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) x_2 étant absente de la deuxieme equation, nous commençons par intervertir les lignes L_1 et L_2.

Cela donne

$$A'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix} \quad b'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ensuite nous éliminons x_2 de la quatrième equation en faisant

$$L4 = L4 - 3L2$$ Cela nous donne

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \qquad b^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4) Pour obtenir ce nouveau systeme, nous avons multiplié A_1 successivement par

- P (permutation) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) Nous éliminons x_3 de l'equation (4) pour ce faire :

$$L4 = L4 + 2L3$$

Cela donne

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6) Pour obtenir ce nouveau système nous avons multiplié par

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Résolution d'un système triangulaire

$x_4 = -2$

$x_3 = -1$

$x_2 = 4$

$x_1 = 3$

8) La matrice A_3 obtenue après toutes les transformations est triangulaire supérieure. Notons la U.

A partir de (1) nous avons

$$A_1 = L_2 L_1 A \quad \text{cad} \quad A = L_1^{-1} L_2^{-1} A$$

avec

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Remarquer la simplicité de l'inversion de ces matrices)

A partir de (2) nous avons

$$A_2 = L_3 P A_1$$

ce qui donne

$$L_3^{-1} A_2 = P A_1 \qquad \text{avec } L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis $A_1 = P L_3^{-1} A_2$

A partir de (3) nous avons

$$A_3 = L_4 A_2$$

soit $A_2 = L_4^{-1} A_3$ avec $L_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} A &= L_1^{-1} L_2^{-1} A_1 \\ &= L_1^{-1} L_2^{-1} P L_3^{-1} A_2 \\ &= L_1^{-1} L_2^{-1} P L_3^{-1} L_4^{-1} A_3 \\ &= L' U \end{aligned}$$

avec $L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas triang inf

$U = A_3$ est triang sup

7. Non A n'admet pas de factorisation LU car $\det A[1..2, 1..2] = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 4

1) $Y = A^{-1} + E$

D'où $\quad Y^{-1} = (A^{-1} + E)^{-1}$

$$= (A^{-1}(I + AE))^{-1}$$

$$= (I + AE)^{-1} A$$

2) $$C_2 = \frac{\|Y^{-1} - A\|}{\|A\|}$$

$$Y^{-1} - A = (I + AE)^{-1} A - A$$

$$= ((I + AE)^{-1} - I) A$$

D'autre part $\quad (I + AE)^{-1}(I + AE) = I$

càd $\quad (I + AE)^{-1} + (I + AE)^{-1} AE = I$

donc $\quad (I + AE)^{-1} - I = -(I + AE)^{-1} AE$

Càd $\quad Y^{-1} - A = -(I + AE)^{-1} AE\, A$

$$\|Y^{-1} - A\| \leq \|(I + AE)^{-1}\| \, \|AE\| \, \|A\|$$

càd $\quad C_2 \leq \|(I + AE)^{-1}\| \, \|AE\|$

7) Nous avions $c_1 \leq \varepsilon$

et nous venons d'obtenir

$$c_2 \leq \frac{\varepsilon \operatorname{cond}(A)}{1 - \varepsilon \operatorname{cond}(A)}$$

Si on prend par exemple

$\varepsilon \operatorname{cond}(A) \simeq 0.5$ $\quad c_2 \leq 1$

$\varepsilon \operatorname{cond}(A) \simeq 0.9$ $\quad c_2 \leq 9$

$\varepsilon \operatorname{cond}(A) \simeq 0.99$ $\quad c_2 \leq 99$

Le majorant de c_2 ne permet pas de conclure que Y^{**} est une bonne valeur pour A^{-1}

3) Nous avons

$$\|AE\| \leq \|A\| \|E\|$$
$$\leq \varepsilon \|A\| \|A^{-1}\| = \varepsilon \operatorname{cond}(A)$$

4) Nous avons

$$(I+AE)^{-1}(I+AE) = I$$

$$(I+AE)^{-1} = I - AE(I+AE)^{-1}$$

5) A partir de la question precedente

$$\|(I+AE)^{-1}\| \leq 1 + \|AE\| \|(I+AE)^{-1}\|$$

D'où $\|(I+AE)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|AE\|}$

6) $c_2 \leq \|(I+AE)^{-1}\| \|AE\|$

donc $c_2 \leq \dfrac{\|AE\|}{1-\|AE\|}$

$$\leq \frac{\varepsilon \operatorname{cond}(A)}{1-\varepsilon \operatorname{cond}(A)}$$

$$\cancel{\leq \frac{1}{1-\varepsilon \operatorname{cond}(A)}}$$

Exercice 5:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) $x = Bx + c$ s'écrit

$$\begin{aligned} x_1 &= 5x_1 + x_2 - 5 \\ x_2 &= \frac{x_2}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{càd} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la solution unique du système

2) $x_0 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1 = Bx + c = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 + 5\varepsilon - 5 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\varepsilon + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\varepsilon+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\varepsilon + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25\varepsilon+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125\varepsilon + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Il est clair que la suite ne converge pas.

La raison est simple :

les valeurs propres de B sont $\{5, \frac{1}{2}\}$

$$\rho(B) = 5 > 1$$

Or nous savons que convergence $\Leftrightarrow$ $\rho < 1$

Exercice 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \qquad A^*A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$4, 2\cancel{4}, 0$

valeurs propres $4, 24$

valeurs singulières $2, 2\sqrt{6}$

Vecteurs propres

AA^*

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 14x_1 + 10x_2 = 4x_1 \\ 10x_1 + 14x_2 = 4x_2 \end{cases} \text{ soit } \boxed{x_1 + x_2 = 0}$$

Donc pour notre matrice $\boxed{u_1 = \alpha_1 * \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 24\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 14x_1 + 10x_2 = 24x_1 \\ 10x_1 + 14x_2 = 24x_2 \end{cases} \quad \boxed{x_1 = x_2}$$

$$\boxed{u_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

A^*A

$\lambda = 4$

$$\begin{cases} 10y_1 + 8y_2 + 6y_3 = 4y_1 \\ 8y_1 + 8y_2 + 8y_3 = 4y_2 \\ 6y_1 + 8y_2 + 10y_3 = 4y_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \beta_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 24$

$$\begin{cases} 10y_1 + 8y_2 + 6y_3 = 24y_1 \\ 8y_1 + 8y_2 + 8y_3 = 24y_2 \\ 6y_1 + 8y_2 + 10y_3 = 24y_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \beta_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$\begin{cases} \quad = 0 \\ \quad = 0 \\ \quad = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc

$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$

Soit $\beta_1 A \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 2\alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ prenons $\boxed{\alpha_1 = 1}$

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$\beta_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Soit $\boxed{\beta_1 = -1}$

$$Av_2 = \sigma_2 u_2$$

$\beta_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \sqrt{24}\,\alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ prenons $\boxed{\alpha_2 = 1}$

$\beta_2 \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{24} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ~~Cela donne $\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$~~

Cela donne $\beta_2 = \frac{\sqrt{24}.\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

$= 1$

Cela donne donc

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{6}}{6} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que $A = U.\Sigma.V^*$

2. Il y a plusieurs méthodes pour calculer la pseudo-inverse. Ici nous appliquons la formule

$$A^+ = V\Sigma^+U^* \quad \text{avec } \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

$$Ax = b \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

1) Moindres carrés

Minimiser $f(x,y) = \| Ax - b \|^2$

$$= (x+y-1)^2 + (x+y+1)^2$$

2) Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y-1+x+y+1 = x+y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \quad " \quad " \quad = x+y$$

L'ensemble des solutions $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

3) Calcul de la pseudo-inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres $4, 0$

Valeur singulière 2

Vecteurs propres de AA^* $\quad 4 \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

V est telque

$$A v_1 = \sigma_1 u_1 = 2 u_1$$

càd $\beta_1 A \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ soit $\beta_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\beta_1 = 1}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $A^+ = V \Sigma^+ U' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$A^+ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc nous avons bien la solution dont la norme est la plus petite.