Examen de rattrapage 15-16 (1)

Correction

Ex1 :

1) Nous avons par definition

$$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

$$= \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$

Or

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$= \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_1$$

Donc

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax_1\|_1 \leq \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Prenons à présent le vecteur $x = (x_j)$ défini par

$$x_j = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$ avec k tq $\sum |a_{ik}| = \max \sum |a_{ij}|$

Nous avons bien $\|x\|_1 = 1$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$$

$$= \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Nous avons bien

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

2) D'après nos calculs de la question 1)

$$\|Ax\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right)$$

$$= \|A\|_1 \|x\|_1$$

3) Prenons maintenant une valeur propre λ de A et un vecteur propre x associé à λ. Nous avons

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1$$

càd $\|\lambda x\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1$

Soit $|\lambda| \, \|x\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1$

d'où $|\lambda| \leq \|A\|_1$

d'où

$$\max |\lambda| \leq \|A\|_1$$

càd $\rho(A) \leq \|A\|_1$

Ex 2

1) Pour $n=3$, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E+F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Nous avons $\big(D-(E+F)\big)x = b$

$$Dx = (E+F)x + b$$

$$x = D^{-1}(E+F) + D^{-1}b$$

Cela donne $B = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

$$c = D^{-1}b$$

3) Calcul des valeurs propres de B

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{6}\right) - \frac{\lambda}{6}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{3}\right)$$

Cela nous donne

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lambda_3 = -i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d'où $\rho(A) = \max|\lambda_i| = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$

donc la méthode converge.

2) Dans le cas general nous avons

(6)

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \Theta & & \\ 1 & 3 & -2 & & \Theta & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & 1 & (i+1) & -i & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & n+1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 3 & & \Theta & \\ & & \ddots & & \\ & \Theta & & n & \\ & & & & (n+1) \end{pmatrix}$$

et $E+F = D-A$

(b) $(D-(E+F))x = b$

$$Dx = (E+F)x + b$$

$$= (D-A)x + b$$

$$x = D^{-1}(D-A)x + b = (I - D^{-1}A)x + b$$

$$B = I - D^{-1}A$$

B est aussi une matrice tridiagonale (avec des 0 sur la diagonale)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & & \Theta & \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & & \Theta \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -\frac{1}{i+1} & 0 & -\frac{i}{i+1} & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{(n-1)}{n} \\ & & -\frac{1}{n+1} & \Theta & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\|B_1\| = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right)$$

Or nous avons

pour la colonne $j=1$ $\sum |a_{ij}| = \frac{1}{3} < 1$

" " n $\sum |a_{ij}| = \left|\frac{n-1}{n}\right| < 1$

pour les autres colonne $\sum |a_{ij}| = \left|\frac{i-1}{i}\right| + \frac{1}{|i+2|} < 1$

donc $\|B\|_1 < 1$

donc $\rho(B) < 1$ donc Jacobi converge

Exercice 3 :

1) La solution est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La methode de résolution est indifferente

2) Il suffit de faire le calcul

3) $$\frac{\| \Delta A\|_1}{\| A\|_1} = 0.0066667$$

$$\frac{\| \Delta x\|_1}{\| x\|_1} = 68.5$$

une variation infiniment petite de A provoque une grande variation de la solution

4) $$\text{Cond}_1(A) = \| A\|_1 \, \| A^{-1}\|_1$$

$$= 33 \cdot 136 = 4488$$

Le conditionnement élevé explique le résultat de la question précedente.

Exercice 4

1) λ est une valeur propre de A ssi

$\exists x \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

cad $\quad (I - A)x = x - \lambda x = (1-\lambda)x$

cad $\quad (1-\lambda)$ valeur propre de $I - A$

2) Nous avons $\rho(A) < 1$

donc $\quad 1$ n'est pas valeur propre de A

donc $0 \quad (1-1)$ n'est pas vp de $I - A$

cad $\quad I - A$ inversible

3) Nous avons

$$(I-A)\sum_{k=0}^{K} A^k = I - A + A - A^2 + \cdots - A^K + A^K - A^{K+1}$$

$$= I - A^{K+1}$$

Puisque $\rho(A) < 1 \quad \lim_{N \to +\infty} A^N = 0$

D'où

$$(I-A)\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = I$$

Cad $$\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I-A)^{-1}$$

4) $$(I+A)^{-1} = \big(I-(-A)\big)^{-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k A^k$$

Exercice 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Nous avons $m=2$ $n=3$

2. Nous avons

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{valeurs propres } 2, 3$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{vp } 0, 2, 3$$

valeurs singulière $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$

Vecteurs propres :

pour AA^* $\quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

pour A^*A :

Calcul de y_1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 2a \\ 2b + c = 2b \\ a + b + c = 2c \end{cases} \qquad y_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de y_2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 3a \\ 2b + c = 3b \\ a + b + c = 3c \end{cases} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Calcul de y_3

$$\begin{cases} 2a + c = 0 \\ 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \qquad V_3 = \cancel{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad y_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

3) Voir en fin de corrigé

4) Pour trouver la décomposition en valeurs singulières, nous écrivons

$$AV = U\Sigma$$

donc pour $i = 1, 2$

$$Av_i = \sigma_i u_i$$ où u_i et v_i sont les $i^{èmes}$ colonnes de U et V

Nous avons aussi

$$u_i = \alpha_i x_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad x_i : \text{v.p de } AA^*$$

$$v_i = \beta_i y_i \qquad \beta_i \in \mathbb{R} \quad y_i : \text{vp de } A^*A$$

Cela donne

<u>$i = 1$</u>

$$\beta_1 A y_1 = \sigma_1 \alpha_1 x_1$$ on prend $\alpha_1 = 1$

$$\beta_1 A y_1 = \sqrt{2}\, x_1$$

Tout calcul fait cela nous donne $\beta_1 = 1$

D'où

$$v_1 = y_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>$i = 2$</u>

$$\beta_2 A y_2 = \sigma_2 \alpha_2 x_2$$ on prend $\alpha_2 = 1$

$$\beta_2 A y_2 = \sqrt{3}\, x_2$$

Tout calcul fait cela donne $\beta_2 = 1$

D'où

$$v_2 = y_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \qquad u_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A present nous pouvons ecrire la decomposition en valeurs singulières de A

$$\underset{(2,3)}{A} = \underset{(2,2)}{U}\ \underset{(2,3)}{\Sigma}\ \underset{(3,3)}{V}^*$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^*$$

càd

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Moindres carrés

1) Nous avons pour $i = 1, \dots, n$

$$y_i = t_i^{\alpha} z_i^{\beta} e^{\gamma}$$

En prenant le logarithme nous obtenons le système

$$\ln y_i = \alpha \ln t_i + \beta \ln z_i + \gamma$$

Que nous notons

$$\boxed{Y_i = \alpha T_i + \beta Z_i + \gamma} \quad i = 1, \dots, n$$

2) Nous savons que dans la méthode des moindres carrés, lorsqu'il s'agit de résoudre un système $Ax = b$

nous minimisons la fonctionnelle

$$f(x) = \| Ax - b \|_2^2$$

Dans notre cas, nous avons

$$Ax - b = \begin{pmatrix} \alpha T_1 + \beta Z_1 + \gamma - Y_1 \\ \vdots \\ \alpha T_n + \beta Z_n + \gamma - Y_n \end{pmatrix}$$

D'où

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha T_i + \beta Z_i + \gamma - Y_i \right)^2$$

3.4) Le système s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} 0.\,\alpha + \ln 0{,}5\ \beta + \gamma = 0 \\ \ln 8\ \alpha + 0.\ \beta + \gamma = \ln 16 \\ \ln 10\ \alpha + \ln 0{,}5\ \beta + \gamma = \ln 10 \\ \ln 10\ \alpha + 0.\ \beta + \gamma = \ln 19 \end{cases}$$

Question 3 - Exercice 5

Nous avons $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

et $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nous avons donc

$\mathrm{Im}(A)$ défini par

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y+z \end{pmatrix} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

donc $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Ker}A$ défini par

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $\begin{cases} x - y = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ \cancel{x}\ y \\ -2x \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}A$ est donc la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$Im(A^T)$ est défini par

$$A^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces deux vecteurs

$Ker(A^T)$ est défini par

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ -x+y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Cad $Ker(A^T) = \{0\}$

Nous vérifions bien au passage que

$$\dim Ker(A) + \dim Im(A) = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\dim Ker(A^T) + \dim Im(A^T) = 0 + 2 = \dim \mathbb{R}^2$$