Examen de rattrapage 1/7/16

Correction

Exercice 1

Nous avons $m = 2$ donc M s'écrit

$$M = m_1 m_2 \qquad m_i \in \{0, \dots, 9\} \quad m_1 \neq 0$$

Nous avons $N = 1$ donc $n \in \{-1, 0, 1\}$

$$x = M \cdot 10^n$$

$$= s\,0.m_1 m_2 \quad 10^n$$

2 possibilités   9 possibilités   10 possibilité   3 possibilités

Nous avons donc $2 \times 9 \times 10 \times 3 = 2 \times 270$ possibilités (270 positifs et 270 négatifs). Les nombres positifs sont

pour $n = -1$

0.010, 0.011, ... , 0.091, . . . , 0,099

pour $n = 0$

0.10, 0.11, ... , 0,99

pour $n = 1$

1.0, 1.1, ... , 9.9

Exercice 2

1) $x_{k+1} = x_k - r(Ax_k - b)$

est une suite construite à partir du

système

$$x = x - r(Ax - b)$$

Soit
$$x = (I - rA)x + rb \quad (1)$$

D'où $\boxed{B = I - rA}$ et $\boxed{c = rb}$

Calculons les valeurs de M et N. Comme vu en cours nous avons

$Ax = (M - N)x = b$

Cela donne

$$Mx = Nx + b$$

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \quad (2)$$

Nous avons en égalisant (1) et (2)

$M^{-1} = rI$ càd $M = \frac{1}{r} I$

$M^{-1}N = (I - rA)$ d'où $N = \frac{1}{r} I (I - rA)$

Soit $N = \frac{1}{r} I - A$

2) Nous avons vu en cours que la CNS pour la convergence de $x_{k+1} = B x_k + c$ est $\boxed{\rho(B) < 1}$ où $\rho(B)$ est le rayon spectral de B

Dans notre cas la CNS est donc

$$\rho(I - rA) < 1$$

Or les valeurs propres de $I - rA$ sont de la forme $1 - r\lambda$ où λ est une vp de A

La CNS est donc

$$|1 - r\lambda| < 1 \quad \text{pour toute vp de A}$$

Soit $-1 < 1 - r\lambda < 1$

A étant symétrique définie positive, toutes ses vp sont positives

D'où $0 < r < \frac{2}{\lambda}$ pour toutes les vp

ou ce qui revient au même

$$0 < r < \cancel{\frac{2}{\lambda_1}} \frac{2}{\lambda_n}$$

où λ_n est la plus petite valeur propre de A.

3) La méthode est d'autant plus rapide que $\rho(B)$ est petit

$\rho(B) = \max |1 - r\lambda_i|$ avec λ_i $i = 1, \ldots, n$ valeur propre de A

Un raisonnement sur les courbes représentant les fonctions $|1 - r\lambda_i|$ (fait en cours) nous donne

$$r = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

Exercice 3

1)
$$\begin{cases} 0.78\, x + 0.563\, y = 0.217 \\ 0.913\, x + 0.659\, y = 0.254 \end{cases}$$

En éliminant y entre les deux equations nous obtenons

$$10^{-6} x = 10^{-6} \qquad \boxed{x = 1}$$

Ce qui donne

$$y = \frac{0.217 - 0.78 \cdot 10^{-6}}{0.563} = -1$$

$$\boxed{x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

De même $x_2 = \begin{pmatrix} -0.163 \\ 0.611 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}$

2) Nous avons donc

$$\frac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1} = 6.5\ 10^{-6}$$

$$\frac{\|\Delta b_A\|_1}{\|b\|_1} = 2.1\ 10^{-6}$$

$$\frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_1\|} = 1.38$$

$$\frac{\|x_3 - x_1\|}{\|x_1\|} = 0.786$$

Nous constatons qu'une variation infiniment petite de A ou de b provoque une variation importante de la solution x.

3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Nous donne un

système à 4 equations à 4 inconnus

$$\begin{cases} 0{,}78\,\alpha_1 + 0{,}563\,\alpha_3 = 1 \\ 0{,}913\,\alpha_1 + 0{,}659\,\alpha_3 = 0 \\ 0{,}78\,\alpha_2 + 0{,}563\,\alpha_4 = 0 \\ 0{,}913\,\alpha_2 + 0{,}659\,\alpha_4 = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne $\begin{cases} \alpha_1 = 659000 \\ \alpha_2 = -563000 \\ \alpha_3 = -913000 \\ \alpha_4 = 780000 \end{cases}$

Ce qui donne

$$\|A^{-1}\|_1 = 1572000$$

et $\|A\|_1 = 1.693$

D'où $\text{cond}_1(A) = 1.693 \times 1572000 = 2661396$

Ce conditionnement très élevé explique les resultats de la question precedente

Ex 4

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 39 \\ 6x_1 + 20x_2 + 6x_3 = 86 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 27 \end{cases}$$

1) Eliminons x_1 des equations (2) et (3).

Pour cela nous faisons

$L2 = 3L_2 - 2L_1$

$L3 = 3L_3 - L_1$

Ce qui donne

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 48 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 39 \\ 180 \\ 42 \end{pmatrix}$$

2) Nous avons multiplié A respectivement par

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Eliminons x_2 de l'equation 3

Pour cela nous faisons

$$L_3 = 4L_3 - L_2$$

Cela donne $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 48 & 12 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 39 \\ 180 \\ -12 \end{pmatrix}$

4) Nous avons multiplié A_1 par

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5) Le système etant à présent triangulaire il est facile à resoudre. Cela donne

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

6) Nous avons donc

$$A_2 = M_3 M_2 M_1 A$$

D'où

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} A_2$$

Les matrices M_1, M_2 et M_3 sont facile à inverser. Nous avons

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A = L\,U \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U = A_2 \\ L = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \end{cases}$$

7) Tous les determinants

$\det A(1:k, 1:k)$ sont non nuls donc

A admet bien une factorisation LU

comme le prouvent les calculs precedents

Exercice 5

1) Nous avons

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul des v.p (communs) des deux matrices donne

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 0$$

[D'où les valeurs singulières $1, \sqrt{3}$]

et les vecteurs propres

Pour AA^T

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Pour A^TA

$$y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Im(A) est défini par les vecteurs

$\left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$ soit $\begin{pmatrix} x+y \\ x \\ y \end{pmatrix}$

Il s'agit donc d'un plan engendré par

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ker(A) est défini par

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

C'est donc la droite $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, càd la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Im(A^T) est défini par

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est donc le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ker(A^T) est défini par

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$$

C'est donc la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On vérifie au passage

$$\dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \mathbb{R}^3$$
$$\dim \operatorname{Im}(A^T) + \dim \operatorname{Ker}(A^T) = \dim \mathbb{R}^3$$

3) Pour la DVS, nous écrivons

$$A = U \Sigma V^*$$

soit $AV = U\Sigma$

càd pour $i = 1, 2$

$$A v_i = \sigma_i u_i$$

et $u_i = \alpha_i x_i$

$$v_i = \beta_i y_i$$

Ce qui donne

- $\beta_1 A y_1 = \alpha_1 \sigma_1 x_1$ on prend $\alpha_1 = 1$

  ce qui donne $\beta_1 = 1$

- $\beta_2 A y_2 = \alpha_2 \sigma_2 x_2$ on prend $\alpha_2 = 1$

  ce qui donne $\beta = 2$

D'où

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Dans la question précédente nous avons obtenu la DVS de A

$$A = U \Sigma V^*$$

Nous savons que la pseudoinverse de A est

$$A^+ = V \Sigma^* U^*$$

avec $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$