

Examen d'analyse numérique

Session principale 2015-16

Date : 1-6-2016

Durée : 3 heures. Les exercices sont indépendants.

1 Exercice 1 : Représentation des nombres

Dans cet exercice, nous considérons la représentation des réels en virgule flottante rappelée en annexe (sous une forme simplifiée). Dans la suite de l'exercice nous considérons $\beta = 2$, $m=8$ et $N=7$.

1. Donnez la représentation des nombres suivants : 0.045, 11.2, $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{3}$.
2. Calculez x_{min} et x_{max} , respectivement plus grand nombre et plus petit nombre positif représentables.
3. Donnez l'ensemble de tous les réels x représentés par le même triplet (s, M, n) .
4. En déduire une majoration de l'erreur relative de précision $\eta(x) = \frac{m(x)-x}{x}$.

2 Exercice 2 : Calcul des erreurs

Dans cet exercice, nous supposons que l'exécution d'une opération arithmétique binaire op provoque une erreur définie par la formule suivante :

$$m(a \ op \ b) = (a \ op \ b)(1 + \epsilon_{op})$$

1. Calculez l'erreur absolue commise sur le calcul de $a + bc$, où a , b , et c sont des réels.
2. Calculez l'erreur absolue commise sur le calcul de $ab + cd$ où a , b , c et d sont des réels.

3. Calculez l'erreur absolue commise sur le calcul du produit scalaire de deux vecteurs $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ pour chacun des deux algorithmes donnés en annexe. Lequel des deux algorithmes est meilleur ? Dans cette question, nous supposons pour simplifier que $\epsilon_+ = \epsilon_* = \epsilon$.

3 Exercice 3 : Factorisation LU

Dans cet exercice nous illustrons la résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss-factorisation LU . Considérons le système $Ax = b$ défini comme suit :

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & + & x_2 & & & + & 4x_4 & = & 2 \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 7x_4 & = & -9 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \\ & & - & 3x_2 & - & 12x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

1. Transformez ce système en éliminant l'inconnue x_1 des équations 2, 3 et 4. Nous noterons ce nouveau système :

$$A_1x = b_1.$$

2. Par quelle(s) matrice(s) avons-nous multiplié la matrice A pour obtenir la matrice A_1 ? Nous noterons (1) la réponse à cette question.
3. Transformez ce système en éliminant l'inconnue x_2 des équations 3 et 4. Nous noterons ce nouveau système :

$$A_2x = b_2.$$

4. Par quelle(s) matrice(s) avons-nous multiplié la matrice A_1 pour obtenir la matrice A_2 ? Nous noterons (2) la réponse à cette question.
5. Transformez ce système en éliminant l'inconnue x_3 de l'équation 4. Nous noterons ce nouveau système :

$$A_3x = b_3.$$

6. Par quelle(s) matrice(s) avons-nous multiplié la matrice A_2 pour obtenir la matrice A_3 ? Nous noterons (3) la réponse à cette question.
7. Résoudre le système.
8. Utilisez les résultats (1), (2) et (3) pour trouver "une décomposition" de la matrice A .
9. La matrice A admet-elle une décomposition LU ? Pourquoi ?

4 Exercice 4 : Conditionnement

Notre objectif dans cet exercice est de comparer deux critères permettant de mesurer la **qualité de l'inverse** Y d'une matrice. Ces deux critères sont définis par les nombres c_1 et c_2 suivants :

$$- c_1 = \frac{\|Y - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}$$

$$- c_2 = \frac{\|Y^{-1} - A\|}{\|A\|}$$

Soit donc A une matrice inversible et Y une matrice telle que

$$- Y = A^{-1} + E \text{ avec } \|E\| \leq \epsilon \|A^{-1}\|.$$

Nous constatons que Y est une bonne approximation de A^{-1} au sens de c_1 .

1. vérifiez que nous avons

$$Y^{-1} = (I + AE)^{-1}A, \text{ où } I \text{ est la matrice identité.}$$

2. En déduire que nous avons

$$c_2 \leq \|(I + AE)^{-1}\| \|AE\|.$$

3. Vérifiez que l'on a :

$$\|AE\| \leq \epsilon \text{ cond}(A), \text{ où } \text{cond}(A) \text{ est le conditionnement de } A \text{ pour la norme } \|\cdot\|.$$

4. Démontrez que l'on a :

$$(I + AE)^{-1} = I - AE (I + AE)^{-1}.$$

5. En déduire que $\|(I + AE)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|AE\|}$.

6. En supposant que $\epsilon \text{ cond}(A) \leq 1$, trouvez un majorant de c_2 .

7. Que peut-on en conclure ?

5 Exercice 5 : Méthodes itératives

Soient la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le vecteur $c = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On considère la méthode itérative définie par $x_{k+1} = Bx_k + c$.

1. Vérifiez que le système $x = Bx + c$ admet bien une solution.

2. En prenant $x_0 = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \\ 1 \end{pmatrix}$ calculez les premiers termes de la suite x_k .

3. Cette suite converge-t-elle ? Pourquoi ?

6 Exercice 6 : Valeurs singulières et pseudo-inverse

1. Calculez "la" décomposition en valeurs singulières de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculez la pseudo-inverse de la matrice A .

7 Exercice 7 : Moindres carrés et pseudo-inverse

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Formulez le problème des moindres carrés associé au système $Ax=b$.
2. Trouvez toutes les solutions de ce problème.
3. Calculez la pseudo-inverse A^+ de la matrice A et vérifiez que A^+b est la solution ayant la norme la plus faible.

8 Annexes

8.1 Représentation en virgule flottante

- β est un entier supérieur ou égal à 2.
- m et N sont deux entiers.
- Tout réel x est représenté par "un nombre machine" $m(x)$ défini comme suit :

$$m(x) = sM\beta^n$$

Le triplet (s, M, n) est défini par :

- s est le signe.
- La mantisse M est égale à $0.b_1b_2\dots b_m$ ou encore à $\sum_{i=1}^m b_i\beta^{-i}$. Dans cette formule nous avons :
 - $\forall i \ 0 \leq b_i \leq \beta - 1$.
 - $b_1 \neq 0$.
- β est la **base** de la représentation.
- L'entier m est le **nombre de chiffres significatifs**.
- La puissance n est comprise entre $-N$ et N .

- NB : Sauf indication contraire, l'arrondi se fait par troncature. Autrement dit un nombre $x=0.b_1...b_mb_{m+1}...$ est représenté par le nombre machine $m(x)=0.b_1...b_m$.

8.2 Algorithmes de calcul du produit scalaire

- Donnés : deux vecteurs $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.
 - Résultat : le produit scalaire $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.
-

1. Premier algorithme.

- (a) $P_1 = x_1y_1$.
- (b) $S_1 = P_1$.
- (c) Pour $i = 2, \dots, n$
 - i. $P_i = x_iy_i$.
 - ii. $S_i = S_{i-1} + P_i$.

2. Deuxième algorithme.

- On suppose pour simplifier que n est une puissance de 2, $n = 2^k$.
- On calcule x_iy_i pour $i = 1, \dots, n$.
- On regroupe ces produits deux par deux : $x_1y_1 + x_2y_2, x_3y_3 + x_4y_4, \dots$
- On regroupe ces sommes deux par deux : $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \dots$
- ...
- On calcule $P_n = x_1y_1 + \dots + x_{N/2}y_{N/2} + x_{N/2+1}y_{N/2+1} + \dots + x_Ny_N$.

Références

- [1] Amodei, Lucas et Dedieu Jean-Pierre. Analyse numérique matricielle. Dunod. 2008, 316 pages.
- [2] Lascaux, Patrick et Théodor Raymond. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1 : Méthodes directes. Dunod. 1986, 326 pages.
- [3] Lascaux, Patrick et Théodor Raymond. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 2 : Méthodes itératives. Dunod. 1987, 302 pages.