Examen d'analyse numérique
Session de rattrapage 2015-16

Date : 01-07-2016

Durée : 3 heures. Les exercices sont indépendants.

---

1 Exercice 1 : Représentation des nombres

En utilisant la représentation vue en cours et rappelée en annexe, listez tous les nombres représentables lorsque l'on prend :
— $\beta = 10$,
— $m = 2$,
— et N=1.

2 Exercice 2 : Méthodes itératives

Dans cet exercice notre objectif est d'étudier la résolution d'un SEL par la méthode dite de **Richardson**.

Soit donc une matrice symétrique définie positive $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$. Pour résoudre le système $Ax = b$ nous considérons la suite de vecteurs (x_k) définie comme suit :

$$x_{k+1} = x_k \text{ - } r(Ax_k - b),$$

où r est un réel strictement positif et x_0 un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

1. Vérifiez que cette méthode consiste à transformer le système de départ en posant $A = M - N$ puis $x = Bx + c$. Précisez M et N, B et c.
2. Donnez la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de cette méthode.
3. Montrez que la valeur optimale de r est $\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$, où λ_1 et λ_n sont les plus petite et plus grande valeurs propres de A.

3 Exercice 3 : Conditionnement

Considérons les deux matrices A et $A + \Delta A$ et les vecteurs b et $b + \Delta b$, définis comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix},\ A + \Delta A = \begin{pmatrix} 0.77999 & 0.563 \\ 0.913001 & 0.659 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix} \text{ et } b + \Delta b = \begin{pmatrix} 0.216999 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

1. Trouvez les solutions x_1, x_2 et x_3 des systèmes $Ax = b$, $(A+\Delta A)x = b$ et $Ax = b + \Delta b$.
2. Calculez les rapports $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$, $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$, $\frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_1\|}$, et $\frac{\|x_3 - x_1\|}{\|x_1\|}$. Que constatez vous ?
3. Calculez l'inverse de la matrice A et utilisez ce résultat pour expliquer ceux de la question précédente.

— **NB :** Les résultats de cet exercice sont indépendants du choix de la norme. Vous pouvez, par exemple, utiliser les normes définies en annexe.

4 Exercice 4 : Factorisation LU

Dans cet exercice nous illustrons la résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss-factorisation LU. Considérons le système $Ax = b$ défini comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} 9x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 39 \\ 6x_1 & + & 20x_2 & + & 6x_3 & = & 86 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 27 \end{array}$$

1. Transformez ce système en éliminant l'inconnue x_1 des équations 2 et 3. Nous noterons ce nouveau système :
$$A_1 x = b_1.$$
2. Par quelle(s) matrice(s) avons-nous multiplié la matrice A pour obtenir la matrice A_1 ? Nous noterons (1) la réponse à cette question.
3. Transformez ce système en éliminant l'inconnue x_2 de l'équation 3. Nous noterons ce nouveau système :

$$A_2x = b_2.$$

4. Par quelle(s) matrice(s) avons-nous multiplié la matrice A_1 pour obtenir la matrice A_2 ? Nous noterons (2) la réponse à cette question.
5. Résoudre le système.
6. Utilisez les résultats (1) et (2) pour trouver une décomposition de la matrice A.
7. La matrice A admet-elle une décomposition LU ? Pourquoi ?

5 Exercice 5 : Décomposition en valeurs singulières

On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de AA^T et de A^TA.

2. Calculer les quatres espaces fondamentaux associés à la matrice A $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A^T)$, $\mathrm{Ker}(A^T)$.
3. Déterminer "la" décomposition en valeurs singulières de la matrice A.
4. Déterminez la pseudo-inverse de A.

6 Annexe

6.1 Représentation en virgule flottante

— β est un entier supérieur ou égal à 2.
— m et N sont deux entiers.
— Tout réel x est représenté par "un nombre machine" $m(x)$ défini comme suit :

$$m(x) = sM\beta^n$$

Le triplet (s, M, n) est défini par :
— s est le signe.
— La mantisse M est égale à $0.b_1b_2...b_m$ ou encore à $\sum_{i=1}^{m} b_i\beta^{-i}$. Dans cette formule nous avons :
  — $\forall i \ 0 \leq b_i \leq \beta - 1$.

  — $b_1 \neq 0$.
- β est la **base** de la représentation.
- L'entier m est le **nombre de chiffres significatifs**.
- La puissance n est comprise entre $-N$ et N.

6.2 Normes matricielles

Considérons la norme vectorielle $\|\|_1$ définie par

- Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$, $\|x\|_1 = \sum_i \mid x_i \mid$.

La norme matricielle associée à $\|\|_1$ est définie par :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$

où a_{ij} est l'élément de la ligne i et la colonne j de A.