Examen d'analyse numérique
Session de rattrapage 2015-16

Date : 29-6-2016

Durée : 3 heures. Les exercices ne sont pas entièrement indépendants. Certains résultats de l'exercice 1 peuvent être utilisés dans les exercices 2 et 3 (même sans être démontrés).

---

1 Exercice 1 : Normes matricielles

Considérons la norme vectorielle $\|\|_1$ définie par

— Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$, $\|x\|_1 = \sum_i \mid x_i \mid$.

1. Démontrez que la norme matricielle associée à $\|\|_1$ est définie par :

   $$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$

   où a_{ij} est l'élément de la ligne i et la colonne j de A.
2. Vérifiez que nous avons :

   $$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|Ax\|_1 \leq \|A\|_1\ \|x\|_1.$$
3. En déduire que nous avons $\rho(A) \leq \|A\|_1$, où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A.

2 Exercice 2 : Méthodes itératives

Considérons la matrice $A = (a_{ij})$, carrée d'ordre n définie comme suit :

— $a_{ii} = i + 1$, pour $i = 1, ..., n$.

— $a_{i+1i} = 1$, pour $i = 1, ..., n - 1$.

— a_{ii+1} = -i, pour $i = 1, ..., n-1$.
— $a_{ij} = 0$, pour toutes les autres valeurs de (i, j).

Notre objectif dans cet exercice est d'étudier la convergence de la méthode de Jacobi pour le système $Ax = b$. Le principe de cette méthode est rappelé en annexe.

1. Dans cette question nous prenons n=3.
   (a) Calculez les matrices A, D et $E + F$.
   (b) Ecrire le système sous la forme $x = Bx$+c.
   (c) Calculez les valeurs propres de B et en déduire que la méthode de Jacobi converge dans ce cas.
2. Reprenez les étapes de la question précédente dans le cas général.

3 Exercice 3 : Conditionnement

Soient les deux matrices A et ΔA et le vecteur b, définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système Ax =b.
2. Vérifiez que la solution du système $(A+\Delta A)x$ =b est le vecteur $x+\Delta x$ $= \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$.
3. Calculez les deux rapports $\frac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1}$ et $\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1}$. Que constatez-vous ?
4. On vous donne la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Expliquez le résultat obtenu dans la question précédente.

4 Exercice 4 : Valeurs propres

On considère une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont le rayon spectral noté $\rho(A)$ vérifie $\rho(A) < 1$.
La matrice identité de $\mathbb{R}^{n\times n}$ est notée I.

1. Montrez que λ est une valeur propre de A si et seulement si $1-\lambda$ est une valeur propre de la matrice $I-A$.
2. En déduire que la matrice $I-A$ est inversible.
3. Montrez que $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.
4. Calculez $(I+A)^{-1}$.

5 Exercice 5 : Décomposition en valeurs singulières

On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Donnez les valeurs de m et n.
2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de AA^T et de A^TA.
3. Calculer les quatres espaces fondamentaux associés à la matrice A $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A^T)$, $\mathrm{Ker}(A^T)$.
4. Déterminer "la" décomposition en valeurs singulières de la matrice A.

6 Exercice 6 : Moindres carrés

On cherche à expliquer la note y obtenue par chaque étudiant à son examen d'analyse numérique par le temps t qu'il a passé à travailler la matière et l'effort z qu'il prétend avoir fourni selon la relation suivante :

$$y = f(z,t) = t^{\alpha} z^{\beta} \exp \gamma$$

où α, β et γ sont les paramètres à déterminer.
On dispose des données $(y_i, z_i, t_i)_{1\leq i\leq n}$ pour n étudiants.
Pour pouvoir utiliser la méthode des moindres carrés, il faut que la relation soit linéaire ce qui s'obtient en travaillant sur $\ln(y)$.

1. Ecrire le système linéaire à résoudre.
2. Donner l'expression de la fonctionnelle à minimiser par la méthode des moindres carrés.

3. **Application** on dispose des données suivantes sur 4 étudiants

$$\begin{pmatrix} y(\text{note}/20) & z(\text{effort}/100) & t(\text{heure}) \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 16 & 1 & 8 \\ 10 & 0.5 & 10 \\ 19 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Donner l'expression de la matrice A associée à ce jeu de données ainsi que le second membre b.

7 Annexe : Rappel de la méthode de Jacobi

Pour résoudre un système Ax=b :

— Nous écrivons la matrice A sous la forme $A = M-N = D-(E+F)$, où D est diagonale, E triangulaire supérieure et F triangulaire inférieure.

— Ensuite nous transformons le système pour le mettre sous la forme $x = Bx+c$.

Nous avons le résultat : la méthode converge si et seulement si $\rho(B)$, le rayon spectral de B, est strictement inférieur à 1.