# Résolution de problèmes (Planification)

Houcine Senoussi

27 décembre 2018

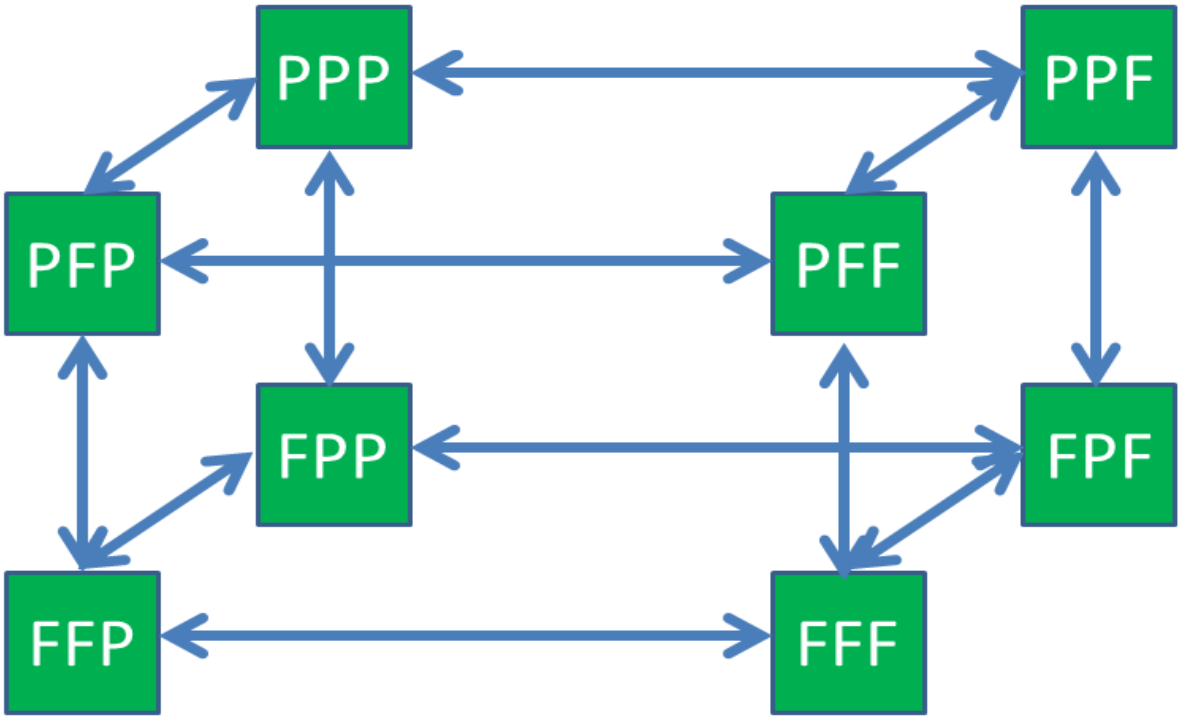
# Définition d'un problème

- Pour définir un problème nous avons besoin des éléments suivants :
  - Un ensemble d'états $S$.
  - Un état initial $e_0 \in S$.
  - Un ensemble d'états finals $F \subset S$.
  - Une fonction de transition $T$ définie par un ensemble d'actions $\{A_{ij}\}$.
    - La notation $A_{ij}$ signifie que cette action permet de passer de l'état $e_i$ à l'état $ej$.
    - Les différentes actions peuvent avoir des coûts différents.
- **Résoudre** le problème signifie trouver une **suite d'actions** conduisant de l'état initial à un état final.
  - On peut exiger certaines propriétés d'une telle suite d'actions : par exemple avoir un coût minimal.

# Un premier exemple

- Considérons 3 pièces de monnaie dont les deux premières montrent 'pile' et l'autre 'face'. On veut que toutes les pièces montrent la même face. Nous avons donc la définition suivante du problème :
- Un état est un triplet $C_1 C_2 C_3$ dont chaque élément représente le coté montré par une pièce. Autrement dit $C_i$ vaut $P$ ou $F$.
- L'ensemble S contient donc 8 éléments.
- L'état initial $e_0$ est égal à $PPF$.
- L'ensemble des états finals $F$ est égal à $\{PPP, FFF\}$.
- À partir de chaque état, trois actions sont possibles : retourner chacune des pièces.
- Les états et les actions sont résumés dans le graphe ci-dessous.
- Ce problème peut être généralisé au cas de $n$ pièces.

# Problème des trois pièces



# Résolution d'un problème

- Résoudre un problème (trouver une suite d'actions allant de l'état initial à un état final) se fait via **une recherche** dans l'espace des états.
- Cela signifie qu'on part de l'état initial :
  - constater que ce n'est pas un état final.
  - **générer** d'autres états obtenus à l'aide des actions qui conviennent.
  - Pour chacun de ces états refaire la même chose :
    - Est-ce un état final ?
    - Si oui, s'arrêter.
    - Si non, générer de nouveaux états et continuer.
- L'ordre dans lequel on considère les états, est définie par une **stratégie de recherche**.

# Résolution d'un problème-2

- Ce processus revient à construire un arbre, appelé **arbre de recherche** défini comme suit :
  - La racine de l'arbre est l'état initial $e_0$.
  - Une feuille correspond à un état qui n'a pas de successeurs :
    - Soit parce que l'algorithme ne l'a pas encore considéré.
    - Soit parce que l'algorithme l'a considéré mais qu'aucun autre noeud n'a été généré à partir de lui.
  - Pour chaque noeud-état $e_i$, les successeurs sont ceux atteints par une action à partir de $e_i$.
  - A chaque étape, l'algorithme choisit une feuille et génère de nouveaux à partir d'elle, s'il y a lieu.
- **Exercice 1** : Montrer les premières étapes de la construction l'arbre de recherche pour le problème des trois pièces.

# Algorithme de construction de l'arbre de recherche

- Initialiser l'arbre en utilisant l'état initial en tant que racine.
- Faire
  - Si aucune feuille n'a de successeurs sortir en **Echec**.
  - Choisir une feuille selon la **stratégie de recherche**.
  - Si le noeud est un état final Alors le retourner (**Succès**).
  - Sinon développer l'arbre en ajoutant les successeurs de ce noeud.

# Exercice 2

- Appliquer ce qui précède pour modéliser les deux problèmes suivants :
  1. La loup, la chèvre et le choux.
  2. Les missionnaires et les cannibales.

# Recherche aveugle

- Plusieurs stratégies existent pour parcourir l'arbre de recherche.
- Les deux principales sont :
  - la recherche en largeur d'abord.
    - On visite d'abord la racine, ensuite tous ses successeurs, ensuite les successeurs de ses successeurs, ...
    - Autrement dit : les neouds sont visités par "niveau".
  - la recherche en profondeur d'abord.
    - Après un noeud, on visite un de ses fils (par exemple le plus à gauche) avant de passer aux autres.
    - Il en résulte, qu'on pousse aussi loin que possible une branche et on ne la quitte que lorsqu'elle s'arrête.

# Recherche aveugle-2

- Ce type de recherche est qualifié d'aveugle car il n'utilise aucune information concernant le problème et visite tous les noeuds de l'arbre :
  - On visite donc les mêmes états plusieurs fois.
  - Il y a des boucles, des retours en arrière, $\cdots$
  - Il en résulte des complexités spatiales et temporelles très élevées (voir exercice ci-dessous).

# Recherche guidée

- Compte tenu des faiblesses de la recherche aveugle que nous avons soulignées, nous avons besoin d'un nouveau type de recherche qui utilise les informations disponibles au sujet des états (la recherche est dite **informée** ou **guidée**).
- Pour cela, nous associons à chaque état $e$ une **valeur** $h(e)$ qui caractérise sa **qualité**.
- La qualité d'un état traduit sa proximité avec un état final.
- Notre recherche utilisera cette information pour privilégier les "bons" états et éviter les autres.

# Recherche guidée-2

- La qualité des états est donc définie par une fonction :
  - $h : S \longrightarrow \mathbb{N}$
- Une telle fonction s'appelle une **heuristique**.
- Puisque une heuristique doit caractériser la proximité d'un état final, elle doit vérifier la propriété :
  - Plus l'état $e$ est proche d'un état final, plus $h(e)$ est faible.

# Recherche guidée-3

- Avant d'étudier les propriétés des heuristiques, nous allons introduire quelques notations en rapport avec le coût des actions $A_{ij}$.
  - $k(e_i, e_j)$ est le coût de l'action la moins chère conduisant de $e_i$ à $e_j$.
  - $k^*(e_i, e_j)$ est le coût de la séquence d'actions la moins chère conduisant de $e_i$ à $e_j$.
  - $g(e_i) = k^*(e_0, e_i)$ est le coût de la séquence d'actions la moins chère conduisant de $e_0$ à $e_i$.
  - $h^*(e_i) = mink^*(e_i, e_f)$ avec $e_f \in F$, est le coût de la séquence d'actions la moins chère conduisant de $e_i$ à un état final.
  - $f(e_i) = g(e_i) + h^*(e_i)$ est le coût de la séquence la moins chère allant de l'état initial à un état final en passant par $e_i$.

# Recherche guidée-4

- Les principales propriétés d'une 'bonne' heuristique sont les suivantes :
  - Elle est **coincidente** si elle reconnaît les états finals. Autrement dit :
    - $\forall\ e_f \in F\ \ h(e_f) = 0$
  - Elle est **consistante** si pour toute paire d'états $e_i$, $e_j$ nous avons :
    - $h(e_i) - h(e_j) \leq k^*(e_i, e_j)$.
  - Elle est **monotone** si pour toute paire d'états $e_i$, $e_j$ telle que $e_j$ est un successeur de $e_i$, nous avons :
    - $h(e_i) - h(e_j) \leq k(e_i, e_j)$.
  - Elle est **minorante** si elle sous estime systématiquement le coût du chemin restant à parcourir :
    - $h(e_i) \leq h^*(e_i)$.

# Exercice 3

- Démontrez les deux propriétés suivantes des heuristiques :
  - Une heuristique $h$ est monotone si et seulement si elle est consistante.
  - Si une heuristique est monotone et coincidente alors elle est minorante.
- Etudier, dans le cas du jeux du taquin les propriétés des deux heuristiques suivantes :
  - $h_1(e_i)$ = nombre de cases mal placées par rapport à l'objectif.
  - $h_1(e_i)$ = somme des distances entre les cases mal placées et leurs positions dans l'objectif.

# Algorithme $A^*$

- Idée principale : À chaque étape de la recherche, cet algorithme privilégie l'état (le noeud de l'arbre de recherche) qui minimise la grandeur suivante :
  - $f(e) = g(e) + h(e)$.
- Rappelons que :
  - $g(e)$ représente le coût pour aller de l'état initial $e_0$ à l'état $e$.
  - $h(e)$ représente une estimation du coût restant pour atteindre un état final.

# Algorithme $A^*$-2

- Structure de données : nous allons utiliser deux **files** appelées *Actif* et *Inacfif* dont les rôles respectifs sont les suivants :
  - *Actif* : Dans laquelle nous mettons les états 'candidats' à être considérés par l'algorithme. En particulier le premier élément de la file est celui qui a la meilleure valeur de $f$, donc celui qui sera considéré en premier par l'algorithme.
  - *Inactif* : contenant les états déjà utilisés.
- Les opérations sur les files sont les suivantes :
  - *FileVide* : retourne un booléen si la file est vide.
  - *Ajouter* : ajoute un élément à la file.
  - *Supprimer* : supprime le premier élément de la file.
  - *AjouterTrier* : ajoute un élément et trie l'ensemble des éléments (états) de la file de manière à mettre en première position celui qui a la meilleure valeur de $f$.

# Algorithme $A^*$-3

- Déclaration des variables et initialisation :
  - $e$, $e'$ : Etat.
  - *Actif*, *Inactif* : File.
  - 
  - $Actif = [e_0]$.
  - $Inactif = []$.
  - $g(e_0) = 0$.
  - $e = e_0$.

# Algorithme $A^*$-3

- Tantque ($FileVide(Actif)$==Faux) ET ($e \notin F$) Faire
  - $supprimer(Actif)$.
  - $ajouter(Inactif, e)$.
  - PourTout $e' \in Succ(e)$ Faire
    - Si (($e' \notin Actif$) ET ($e' \notin Inactif$)) OU ($g(e') > g(e) + k(e, e')$ Alors
    - $g(e') = g(e) + k(e, e')$.
    - $f(e') = g(e') + h(e')$.
    - père$(e') = e$.
    - AjouterTrier($Actif$, $e'$).
    - FinSi
  - FinPour
  - Si ($FileVide$(Actif)==Faux) Alors
    - $e = premier(Actif)$.
  - FinSi
- FinTantque

# Exercice 4

- Appliquez l'algorithme au problème du Taquin.

# Conclusion

Un premier exemple classique de problème d'IA : la planification.