Modélisation des jeux par des graphes

Maria Malek

28 novembre 2013

Avant Propos

- Ces transparents sont extraits du polycopié de Chrys Baskiotis sur les méthodes de recherche pour les jeux.

Généralités

- Jeu à deux joueurs avec information parfaite :
  - chaque joueur est au courant de ce que l'autre a fait ou peu faire
  - joueur 1 (MAX ou A) : celui qui commence cherche la situation qui lui permet de maximiser ses gains.
  - joueur 2 (Min ou B) : celui qui répond doit chercher, parmi les situations qui mènent à la victoire du joueur 1, celle qui minimise ses gains.
- Modélisation par un graphe $G = (X, \Gamma)$, X étant les situations du jeu et $\Gamma(X)$ étant les situations successeurs de X.

Graphes progressivement finis

- Définitions
  - Un graphe $G = (X, \Gamma)$ est localement fini si le nombre de successeurs et de prédécesseurs de chaque sommet est fini.
  - Un graphe est borné s'il existe un naturel m tel que le nombre de successeurs de chaque sommets est inférieur à m.
  - Un graphe est progressivement fini en $x \in X$ s'il n'existe pas de chemins de longueur infinie qui commence en x.
  - Un graphe est progressivement fini s'il est progressivement fini en chacun de ses sommets.
  - Un graphe est progressivement borné en $x \in X$ s'il existe un naturel m tel que tout chemin qui commence par x soit de longueur non supérieure à m.
  - Un graphe est progressivement borné s'il est progressivement borné en chacun de ses sommets.

Fonction de Grundy

- Définition
  - Soit un graphe fini $G = (X, \Gamma)$ et une fonction $g : X \rightarrow N$. La fonction g est une fonction de Grundy sur le graphe si pour tout sommet $x \in X$,la valeur g(x) est le plus petit naturel qui n'est pas dans l'ensemble $g(\Gamma(x)) = \{g(y)/y \in \Gamma(x)\}$
- Théorème
  - Si un graphe $G = (X, \Gamma)$ est progressivement fini, alors il admet une et une seule fonction de Grundy.

Noyau de graphes

- Définitions
  - Soit un graphe $G = (X, \Gamma)$. Un ensemble $S \subset X$ de sommets est un noyau du graphe si S est stable intérieurement et extérieurement, c'est à dire si
    1. $\forall x \in S$, on a$\Gamma(x) \cap S = \Phi$
    2. $\forall x \notin S$,on a $\Gamma(x) \cap S \neq \Phi$
- Théorèmes
  - Un graphe progressivement fini admet un noyau.

Jeu de nim

- Définitions
  - Jeu de nim : jeu se joue à deux au tour par tour. Il s'agit en général de déplacer ou de prendre des objets selon des règles qui indiquent comment passer d'une position du jeu à une autre.
    1. Le nombre de positions est fini et la partie se termine nécessairement.
    2. le joueur ne pouvant plus jouer étant le perdant (ou selon certaines variantes, le gagnant).
- Théorèmes
  - Si pour un jeu de nim, le graphe admet un noyau S et si un joueur choisit un sommet dans S, ce choix assure le gain ou la nullité.

Calcul de la fonction de Grundy

- Soit G le graphe de jeux et soit F une file d'attente.
  1. Initialiser F avec les sommets ayant le nombre minimal de successeurs
  2. tantque F est non vide faire
     - Retirer le premier élément de F : f.
     - Calculer sa fonction de Grundy g(f).
     - Marquer f.
     - Soit M l'ensemble de prédécesseurs de f non marqués triés par nombre croissant de successeurs.
     - Ajouter M à la fin de F.

Exercice 1

- Considérons le jeu de fan-tan à deux joueurs suivant :
  - Il y a deux rangées d'allumettes, une contenant trois allumettes et l'autre une.
  - Chaque joueur à son tour peut prendre d'une rangée autant d'allumettes qu'il souhaite et au minimum une.
  - Le joueur qui prend en dernier gagne la partie.

1. Faire le graphe du jeu et calculer une fonction de Grundy pour ce jeu.
2. À l'aide de la fonction de Grundy, élaborer une stratégie qui permet au joueur MAX de gagner à coup sûr.
3. Établir l'arbre de solution pour ce jeu en utilisant l'algorithme du minimax.
4. Même question mais en utilisant l'algorithme alpha-beta.

Exercice 2

- Considérons un tas de m allumettes et deux joueurs. Chaque joueur à son tour peut prendre $k = 3$ allumettes à la fois. Le joueur qui prend en dernier gagne la partie.
    1. Etablir le graphe du jeu.
    2. Donner les conditions qui permettent à ce graphe d'avoir une fonction de Grundy. Calculer cette fonction.
    3. Évaluer la fonction de Grundy à l'aide du numéro du sommet et de la valeur de k. N.B. Un sommet aura comme numéro n, s'il contient n allumettes.
    4. Donner le noyau du graphe et trouver une position initiale gagnante pour le joueur A lors du premier coup.