Une introduction à l'apprentissage par renforcement

Houcine Senoussi

14/3/2019

De quoi s'agit-il ?

Définition :

L'apprentissage par renforcement est le problème auquel est confronté un agent qui apprend à se comporter à l'aide des interactions avec son environnement, basées sur le principe Essai-Erreur.

Autrement dit : chaque action affectuée par l'agent provoque un retour de la part de l'environnement (une "récompense" ou une "punition"). Ce retour est utilisé par l'agent pour affiner ses choix de l'action à exécuter.

De quoi s'agit-il ?

Le modèle de l'apprentissage est donc défini comme suit :

- Un agent est connecté à son **environnement** via sa **perception** et son **action**.
- À chaque étape, l'agent reçoit en entrée une indication concernant l'état de l'environnement. Il choisit alors une action.
- L'action modifie l'état de l'environnement et l'agent reçoit un **retour** de ce dernier.
- Le comportement de l'agent doit maximiser la somme à long terme de ces retours.
- Il **apprend** à faire cela en renouvellant les essais et en prenant en compte les retours de l'environnement.

Exemples

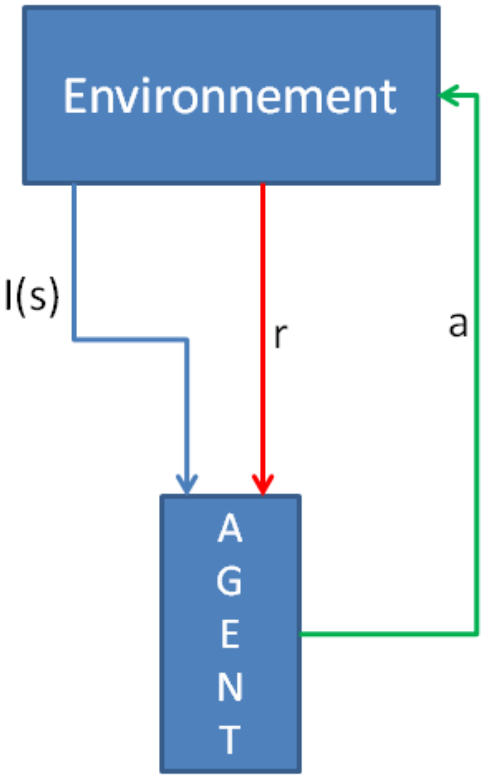
1. Un robot qui se déplace dans un environnement dans lequel il y a de la nourriture ($\rightarrow$ récompense) et des obstacles ($\rightarrow$ punition).
2. Jeux (ex : Backgammon, Go) : gain $\rightarrow$ récompense, perte $\rightarrow$ punition.

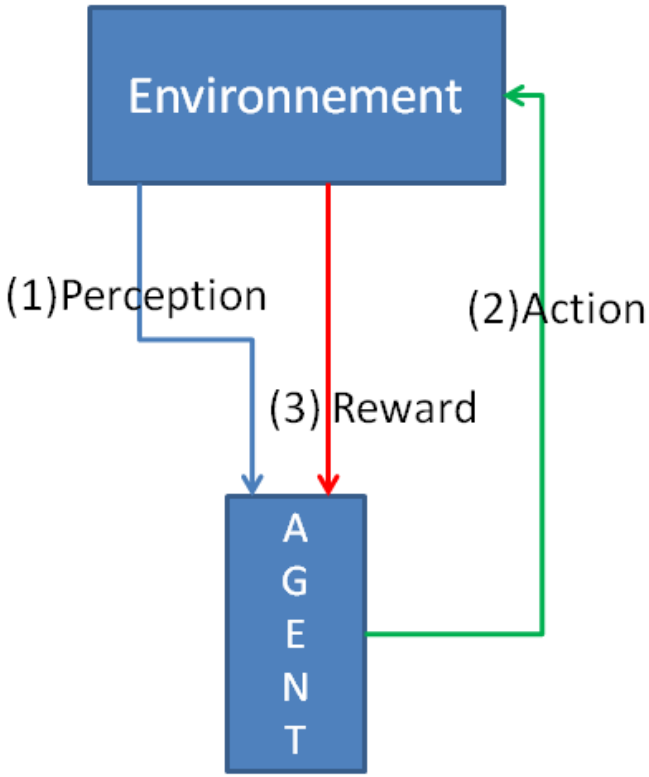
Formalisation

Un problème d'apprentissage par renforcement est défini par :

- Un ensemble d'états S.
- Un ensemble d'actions $\mathcal{A}$.
- Un ensemble de "signaux de renforcement" scalaires : qui peut être l'ensemble $\{0, 1\}$ ou l'ensemble $\mathbb{R}$ par exemple.
- Une fonction I dont l'ensemble de départ est S. À chaque étape, l'entrée de l'agent est la valeur $I(s)$, où s est l'état en cours.
  - Ici nous prenons $I =$ la fonction Identité de S (comme c'est souvent le cas dans le domaine). Ce choix correspond à l'hypothèse de "l'observabilité totale" : l'agent perçoit l'environnement tel qu'il est.
- Une fonction *reward* qui détermine le "signal de renforcement" r obtenu après chaque action.

Formalisation





Formalisation

- Le déroulement de l'apprentissage est donc une suite d'étapes dont chacune est composé de :
  1. Perception : l'agent reçoit la valeur de l'état s.
  2. Décision/Action : l'agent exécute une action a.
  3. Conséquence : L'agent reçoit un reward r de la part de l'environnement-L'environnement passe dans l'état s'.
- L'agent doit donc associer une action a à chaque état s.
  1. Il doit donc **apprendre** une stratégie $\pi : S \longrightarrow \mathcal{A}$.
  2. Cet apprentissage est guidé par un objectif : maximiser la somme des rewards à long terme.
  3. Plusieurs algorithmes d'apprentissage possibles (voir plus bas).

Formalisation

Remarques : L'environnement est souvent non déterministe : une même action exécutée à partir d'un même état à deux moments différents peut générer deux couples différents (reward r, nouvel état s'). Même lorsque c'est le cas l'environnement est supposé stationnaire : les probabilités des nouveaux couples (r, s') sont toujours les mêmes.

Modèles d'optimalité

- Nous avons dit que l'objectif de l'agent doit être de maximiser le gain à long terme.
  - Question : comment prendre en compte le futur dans la prise de décision ? Autrement dit : quel horizon considérer et comment prendre en compte les récompenses futures ?
- Il y a principalement trois modèles pour prendre en compte le futur : le modèle à horizon fini, le modèle à horizon infini et Modèle à "récompense moyenne".

Modèles d'optimalité

1. Modèle à **horizon fini**. L'agent doit maximiser la moyenne de ses rewards sur les h prochaines étapes. Soit :
$$E(\sum_{t=0}^{h-1} r_t)$$
2. Modèle à **horizon infini** pondéré avec un facteur d'actualisation γ. L'agent prend en compte la totalité des rewards futurs mais l'importance de ces derniers décroit lorsqu'on s'éloigne de l'étape courante. La valeur à maximiser est :
$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t$$
avec $0 \leq \gamma < 1$.

Modèles d'optimalité

3. Modèle à "récompense moyenne" (average-reward). Là aussi, le long terme est pris en compte mais sous une autre forme. C'est la moyenne des récompenses à long-terme que l'agent doit maximiser, soit :

$$lim_{h\to\infty} E(\frac{1}{h}\sum_{t=0}^{h-1} r_t)$$

- **Exemple :** Faire l'exercice 1 du TD. Objectif : comparer ces trois modèles.

Le choix du modèle d'optimalité et de ses paramètres éventuels doit être fait en fonction de l'application considérée. Dans ce cours nous adoptons le modèle à horizon infini avec un facteur d'actualisation γ.

L'AR et les autres types d'apprentissage

1. Rappelons qu'on dit qu'un programme (un agent) **apprend** si sa **performance** dans l'exécution d'une **tâche** s'**améliore** avec l'**expérience**.
2. L'AR vérifie bien cette définition : La performance dans l'exécution est mesurée par le retour de l'environnment. L'expérience est la suite des interactions avec l'environnement. L'amélioration de la performane grâce à l'expérience se fait par la prise en compte des retours de l'environnement dans l'exécution des actions "qui rapportent le plus".

L'AP et les autres types d'apprentissage-2

3. Contrairement à l'apprentissage supervisé ne reçoit pas en entrée des exemples (pas de superviseur) qu'il faut généraliser.
4. Contrairement à l'apprentissage non supervisé, l'AR ne se contente de regrouper des données (les états et les actions) selon une mesure de similarité. Il leur associe une **valeur** en fonction des retours de l'environnement.
5. Contrairement aux deux autres types d'apprentissage, l'AR introduit la notion d'action et celles d'essai, d'erreur et de récompense/punition. Il introduit aussi le facteur temps (prise en compte de la récompense à long-terme).

Ce qu'on cherche à modéliser

- L'agent doit apprendre une stratégie $\pi : S \longrightarrow \mathcal{A}$.
  - Une stratégie définit les actions "**immédiates**" mais l'objectif de l'agent est de **maximiser** le cumul **récompenses** à **long terme**.
  - Autrement dit, l'agent apprend à choisir une action en fonction de récompenses qui peuvent arriver bien plus tard.
  - Il doit donc être capable de calculer pour chaque état s une valeur $V^{\pi}(s)$ qui caractérise le cumul des récompenses à partir de l'état si une stratégie π est suivie.
- Ces problèmes sont très bien modélisés par les processus de modélisation markovien que nous présentons dans cette section.

Propriété de Markov

Définition :

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires X_t $t \in T$ indexée par le temps.

Définition :

Un processus stochastique vérifie la **propriété de Markov** si la prédiction de l'avenir à partir du présent n'y est pas rendue plus précise par la connaissance du passé. Un tel processus est appelé **processus de Markov**. Un processus de Markov peut être continu ou discret.

Propriété de Markov-2

Définition :

Cas discret : Soit X_t, $t \in \mathbb{N}$ une suite de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans l'ensemble fini ou dénombrable $S = \{s_1, s_2, ..., s_M, ...\}$, appelé espace d'états. Cette suite est appelée **chaîne de Markov** si nous avons la propriété :

- pour tout ensemble de valeurs x_0,...,x_{t-1}, x, y prises dans S
  - $P(X_{t+1} = y | X_t = x, X_{t-1} = x_{t-1}, ..., X_0 = x_0) = P(X_{t+1} = y | X_t = x)$

Propriété de Markov-3

Cela signifie que :

- L'état à un instant donné dépend de celui à l'instant précédent mais pas de l'historique.
- Autrement dit : "Le futur dépend directement du présent mais pas du passé".
- On peut aussi parler d'un processus "sans mémoire".
- La distribution conditionnelle de probabilité des états futurs ne dépend que de l'état présent.

Matrice de transition

- Nous notons P_{ij} pour $s_i, s_j \in S$ la probabilité de passer de l'état s_i à l'état s_j. Autrement dit $P_{ij}=P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i)$. Ces valeurs peuvent donc être résumées dans la matrice carrée suivante appelée **matrice de transition** :

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1M} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2M} \\ .. & .. & \dots & .. \\ .. & .. & \dots & .. \\ P_{M1} & P_{M2} & \dots & P_{MM} \end{pmatrix}$$

- Propriété de la matrice de transition : la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

Chaîne de Markov

La connaissance de la matrice de transition et de la distribution de X_0 est suffisante pour cacluler la probabilité de toute suite d'états. En effet :

$$\begin{aligned} A &= P(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) \\ &= P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) P(X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) \\ &= P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) P(X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) \\ &= P_{x_n x_{n-1}} P(X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) \\ &= ... \\ &= P_{x_n x_{n-1}} ... P_{x_1 x_0} P(X_0 = x_0) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov-Exemples

- Faire l'exercice 2 et/ou l'exercice 3 du TD.

Apprentissage par renforcement & Propriété de Markov

- Le fonctionnement de l'agent tel que nous l'avons décrit indique que :
  - L'état S_{t+1} de l'agent à l'instant $t+1$ dépend entièrement de son état S_t à l'instant t.
- La suite S_1, ..., S_t, S_{t+1}, ... est donc une chaîne de Markov.
- Nous reste à prendre en compte les actions et les récompenses dans le modèle. C'est ce qu'on fait en introduisant les **processus markoviens de décision**.

Chaîne de Markov-Introduction d'une récompense

- Tous les états n'ont pas dans la vie d'un agent la même valeur. L'origine de cette différence dépend des applications. Par exemple : un état qui correspond à une partie gagnée a forcément une valeur supérieure à celle d'un état qui correspond à une partie perdue.
- Nous allons donc supposer qu'à chaque état s correspond une récompense R_s.
  - Cette récompense est une donnée du problème. Elle est définie comme étant la récompense moyenne que l'agent reçoit à l'instant $t+1$ lorsque à l'instant t il est dans l'état S. Autrement dit :

$$R_s = E(R_{t+1} \mid S_t = s)$$

Chaîne de Markov-Introduction d'une récompense

- Reste à en déduire la "vraie" valeur d'un état.
- **Question :** De quelle manière un agent doit-il prendre en compte les récompenses futures pour évaluer la qualité d'un état ?
  - Autrement dit : de quelle manière l'agent doit-il intégrer le futur dans sa prise de décision ?

Chaîne de Markov avec récompense-Valeur d'un état

- Compte tenu du fait que nous avons adopté le modèle à **horizon infini et actualisé**, cette valeur se définit de la manière suivante :

$$v(s) = E(R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + ... \mid S_t = s).$$

- Cette valeur peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} V(s) &= E(R_{t+1} \mid S_t = s) + \gamma E(R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + ... \mid S_t = s). \\ &= R_s + \gamma \sum_{s'} P_{ss'} V(s'). \end{aligned}$$

Chaîne de Markov avec récompense-Équation de Bellman

- Pour obtenir les valeur de chaque état, nous devons donc résoudre le système suivant contenant une équation pour chaque état s de S : $V(s) = R_s + \gamma \sum_{s'} P_{ss'} V(s')$.
- Plusieurs méthodes de résolution existent :
  1. Résolution directe du système (surtout lorsque le nombre d'états est faible, voir TD).
  2. Résolution indirecte (exemple : programmation dynamique).
- Exemple : Suite de l'exercice 3 du TD.
- Pour arriver à une description complète de nos problèmes d'apprentissage par renforcement il nous faut ajouter un ensemble d'actions. Pour cela nous introduisons les **processus de décision markoviens**.

Processus de décision markovien

Définition :

Un processus de décision markovien est défini par

- un ensemble d'états S.
- un ensemble d'actions $\mathcal{A}$.
- une fonction de transition $T : S \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \longrightarrow [0, 1]$.
  - $T(s, a, s')$ est la probabilité de passer de l'état s à l'état s' en utilisant l'action a.
  - On peut aussi dire que $T(s, a, s') = P(S_{t+1} = s' \mid S_t = s, A_t = a)$
- une fonction de récompense (reward) $R : S \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$.
- un facteur d'actualisation $\gamma \in [0, 1[$.

Processus de décision markovien-2

- **Remarque :** Compte tenu du fait qu'une action a, exécutée à partir d'un état s peut conduire à plusieurs états, la valeur $R(s, a)$ est une moyenne. Plus précisément :
  - $R(s, a) = E(R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a)$.

Qu'est-ce qu'une stratégie ?

- Une stratégie (policy) définit un comportement possible de l'agent. Dans le cas général elle est définie par une distribution de probabilités :
  - $\pi(s, a) = P(A_t = a \mid S_t = s)$.

  Dans le cas déterministe, elle est définie par une fonction :
  - $\pi : S \longrightarrow \mathcal{A}$.

Valeur d'un état

- Pour caractériser la qualité des états en termes de récompenses immédiate et futures, nous introduisons la notion de **valeur** d'un état.
- Pour commencer, nous définissons la valeur d'un état s pour une stratégie donnée π. :

$$V_\pi(s) = E_\pi(\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t)$$

où E_π signifie que la moyenne est calculée dans le cas où la stratégie suivie par l'agent est π. Autrement dit $V_\pi(s)$ est la valeur moyenne de la somme actualisée des récompenses que l'agent va gagner s'il commence en s et qu'il exécute la stratégie π.

Valeur d'un état-2

- Nous définissons **la valeur optimale** d'un état s de la manière suivante :
  - C'est la valeur moyenne de la somme actualisée des récompenses que l'agent va gagner s'il commence en s et qu'il exécute la stratégie optimale. Soit :

$$V^*(s) = max_\pi E(\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t)$$

- Cette valeur est unique et est la solution des équations suivantes :

$$V^*(s) = max_a(R(s,a) + \gamma \sum_{s'} T(s,a,s')V^*(s'))$$

Valeur d'un état-3

- La valeur optimale des états nous permet de caractériser une **stratégie optimale** (déterministe) π^* :

  $$s \in S,\ \pi^*(s) = argmax_a(R(s,a) + \gamma \sum_{s'} T(s,a,s')V^*(s'))$$

- Il nous faut à présent résoudre ces équations pour déterminer, ou du moins approcher, la fonction V^* et la stratégie π^*.
- Pour commencer, nous allons présenter les deux algorithmes **Value Iteration** et **Policy Iteration**.

L'algorithme 'Value Iteration'

Pour trouver la stratégie optimale π^* en passant par la fonction valeur optimale V^*, on peut utiliser l'algorithme **Value Iteration** suivant :

1. Initialiser $V(s)$, $s \in S$ à des valeurs quelconques.
2. Répéter jusqu'à (critère d'arrêt atteint)
   1. Pour chaque état s
      1. Pour chaque action a
         $Q(s,a) = R(s,a) + \gamma \sum_{s'} T(s,a,s')V(s')$
      2. $V(s) = max_a Q(s,a)$

L'algorithme 'Value Iteration'-2

- Il a été démontré que cet algorithme converge vers la fonction V^*.
- Critère d'arrêt : Le maximum des différences entre deux valeurs successives de V est inférieur à ϵ pour un paramètre ϵ donné.
- Complexité de l'algorithme : Au pire des cas chaque itération est quadratique en $|S|$ et linéaire en $|\mathcal{A}|$. L'ensemble des valeurs de $T(s, a, s')$ étant creux (grand nombre de valeurs 0), dans la pratique chaque itération est aussi linéaire en $|S|$.

L'algorithme 'Value Iteration'-3

- Une fois obtenue l'estimation V de V^* à l'aide de cet algorithme, on déduit une estimation π de la stratégie optimale π^* en affectant à chaque état s l'action $\pi(s) = a$ qui permet d'atteindre la valeur $V(s)$.
  - Question : Peut-on modifier 'légèrement' cet algorithme de manière qu'il retourne les deux estimations V et π ?

L'algorithme 'Policy Iteration'

Cet algorithme manipule directement la stratégie π plutôt que la fonction V.

1. Choisir une stratégie quelconque π'.
2. Répéter
   1. $\pi = \pi'$
   2. Calculer la fonction V_π. Pour ce faire résoudre le système :
      - $V_\pi(s) = R(s, \pi(s)) + \gamma \sum_{s'} T(s, \pi(s), s') V_\pi(s'))$
   3. Mettre à jour la stratégie. Pour chaque état s:
      - $\pi'(s) = argmax_a(R(s, a) + \gamma \sum_{s'} T(s, a, s') V_\pi(s'))$
3. Jusqu'à $\pi' = \pi$

Les méthodes sans modèle

Les deux algorithmes que nous venons de présenter supposent que nous connaissons déjà le '**modèle**' du problème, c'est-à-dire la fonction de transition $T(s, a, s')$ et la fonction de renforcement $R(s, a)$. L'apprentissage par renforcement, consiste à trouver (plus exactement **apprendre**) la stratégie optimale lorsque ce modèle n'est pas connu à l'avance. L'agent doit interagir avec son environnement pour obtenir des informations qui, à l'aide d'un algorithme approprié, permettront de découvrir la stratégie optimale.
Nous avons donc besoin d'une méthode qui ne suppose pas que le modèle est déjà connu. Il en existe deux catégories que nous appellerons **model-based** et **model-free**.

Les méthodes **model-based**

1. Les méthodes de la première catégorie commencent par estimer un modèle puis l'utilisent pour calculer une stratégie optimale. On parle alors d'**apprentissage indirect** ou de **model-based** methods. Elles procèdent de deux façons différentes :
    1. On construit d'abord le modèle (les fonctions $T()$ et $R()$) et ensuite on applique l'un des algorithmes présentés plus haut pour trouver la valeur optimale des états et/ou la stratégie optimale.
    2. La construction du moodèle et son utilisation pour définir la stratégie optimale sont imbriquées. La méthode Dyna que nous présentons ici procède de cette façon.

Les méthodes **model-free**

2. Les méthodes de la deuxième catégorie apprennent une stratégie optimale sans passer par un modèle. On parle alors d'**apprentissage direct** ou de **model-free** methods. Les méthodes **Q-learning** et que nous présentons ici sont des exemples de cette catégorie.

L'algorithme Dyna

Une boucle dont chaque itération utilise un quadruplet (s, a, s', r).

1. Mettre à jour les valeurs du modèle $\hat{T}$ et $\hat{R}$.
2. Mettre à jour la stratégie en s en utilisant la dernière version du modèle.
   - $Q(s,a) = \hat{R}(s,a) + \gamma \sum_{s'} \hat{T}(s,a,s') max_{a'} Q(s',a')$
3. Mettre à jour k autres valeurs de $Q(s_i, a_i)$ $i = 1, ..., k$, pour des couples (s_i, a_i) choisis au hasard.
4. Choisir une action a' à exécuter en s' et recommencer.

Q-learning, principe

- Il s'agit d'évaluer la qualité de chaque action partant de chaque état.
  - La qualité d'un couple état/action est liée à la récompense cumulée dans le futur (long-terme) lorsque l'agent exécute l'action en partant de l'état et qu'ensuite il se comporte de manière optimale.
- L'**apprentissage** consiste à affiner progressivement cette évaluation à l'aide de la récompense r obtenue à chaque exécution de l'action à partir de l'état.

La fonction Q

- Pour un état s et une action a, $Q^*(s,a)$ représente la moyenne de la récompense cumulée lorsque l'agent est dans l'état s, qu'il exécute l'action a puis se comporte de manière optimale. Nous avons donc :

$$Q^*(s,a) = R(s,a) + \gamma \sum_{s'} T(s,a,s') max_{a'} Q^*(s',a').$$

- À partir de cette fonction, nous pouvons déduire la valeur optimale de chaque état et la stratégie optimale :
  1. $V^*(s) = max_a Q^*(s,a)$.
  2. $\pi^*(s) = argmax_a Q^*(s,a)$.

La fonction Q

Remarque : comme nous l'avons fait pour la fonction V valeur des états, nous pourrions aussi définir la fonction Q^π pour une stratégie quelconque π puis considérer Q^* comme celle correspondant à la stratégie optimale π^*.

L'algorithme Q-learning

L'algorithme (d'apprentissage) Q-learning consiste à apprendre la fonction Q^* (à partir de maintenant on dira Q tout simplement), pour ensuite en déduire la stratégie optimale π^*. Il se compose d'une suite d'étapes (ou épisodes) qui se déroulent toutes selon les étapes suivantes :

1. L'agent oberve son état s.
2. Il choisit et exécute une action a.
3. Il observe le nouvel état s'.
4. Il reçoit une récompense immédiate r.
5. Il met à jour la valeur de Q pour le couple (s, a).

Choix d'une action

Comment l'agent choisit-il l'action à exécuter (étape 2) ? Il doit trouver un compromis entre les deux possibilités suivantes :

1. **Exploitation :** Choisir l'action qui (selon l'évaluation actuelle) rapporte la récompense à long-terme la plus importante, c'est-à-dire celle qui correspond la plus grande valeur de $Q(s, a)$.
2. **Exploration :** Choisir une action au hasard. L'objectif étant d'**explorer** une direction qui ne l'a pas encore été.

L'algorithme aura donc un paramètre qu'on note ϵ qui représente ce compromis. Plus exactement ϵ représentera la probabilité qu'on veut donner aux choix aléatoires d'une action.

Facteur d'apprentissage

Nous avons besoin de la règle de mise à jour de la valeur de Q (étape 5). Cette règle est la suivante :

$$Q(s,a) = Q(s,a) + \alpha(r + \gamma max_{a'} Q(s',a') - Q(s,a))$$

qu'on peut écrire aussi de la manière suivante :

$$Q(s,a) = (1-\alpha)Q(s,a) + \alpha(r + \gamma max_{a'} Q(s',a'))$$

α est un paramètre compris entre 0 et 1 appelé **facteur d'apprentissage** (**learning rate**).

L'algorithme Q-learning-Convergence

Notons $Q_n(s,a)$ la valeur de fonction $Q(s,a)$ à la n^{ieme} itération de l'algorithme. Il a été démontré que :

1. Dans le cas déterministe :
   - Si chaque couple (s,a) est visité **infiniment souvent** alors $lim_{n\to\infty}\ Q_n(s,a) = Q^*(s,a)$
2. Dans le cas stochastique :
   - Le résultat le plus connu concernant la convergence dans ce cas considère un facteur d'apprentissage α dépendant du temps.
   - Autrement dit nous avons :

$$Q_n(s,a) = Q_{n-1}(s,a) + \alpha_n(r_n + \gamma max_{a'} Q_{n-1}(s',a') - Q_{n-1}(s,a))$$

L'algorithme Q-learning-Convergence(2)

2. Cas stochastique (suite):
   - Notons $n^i(s,a)$ le numéro de l'itération où l'action a est exécutée à partir de l'état s our la i^{eme} fois. Si les conditions suivantes sont vérifiées :
     1. Les récompenses r sont bornées : $\exists\ \mathcal{R}\ \forall n\ |r_n| \leq \mathcal{R}$.
     2. La fonction α vérifie les propriétés suivantes :
        (a) $\forall\ n,\ 0 \leq \alpha_n < 1$.
        (b) $\forall\ s, a,\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{n^i(s,a)} = \infty$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^2_{n^i(s,a)} < \infty$
   - Alors $\forall\ s, a,\ Q_n(s,a) \rightarrow Q^*(s,a)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ avec une probabilité 1.

L'algorithme Q-learning-Convergence(3)

2. Cas stochastique (suite):
   - La condition nécessaire pour la convergence peut être exprimée de la manière suivante :
     1. Les récompenses sont bornées.
     2. Tous les facteurs d'apprentissage sont compris entre 0 et 1.
     3. Pour chaque couple (s, a), (s, a) est visité (première somme $\rightarrow \infty$).
     4. Pour chaque couple (s, a), le facteur d'apprentissage utilisé pour ce couple décroit "d'une certaine manière" : la première somme $\rightarrow \infty$ et ldeuxième somme reste bornée.
   - Exemple de "bonnes valeurs de α_n" : Nous savons que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$, donc on peut prendre :

$$\alpha_n = \frac{1}{n^w} \text{ avec } \frac{1}{2} < w <= 1.$$

Conclusion

Nous avons présenté l'apprentissage par renforcement à travers :

- Son principe et ses spécificités.
- Sa modélisation : processus markovien de décision.
- Plusieurs exemples d'algorithmes et notamment le Q-learning.

Références

- Reinforcement Learning : A Survey. L.P. Kaebling et al.
- Initiation aux probabilités. Sheldon M. Ross.
- Q-learning. Technical note. C. Watkins.
- Cours de David Silver à l'UCL. `http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/d.silver/web/Teaching.html`