Département de Mathématiques
Année universitaire 2019-2020

Examen du 04/06/2020

Filière : **Ingénieurs 1$^{\text{ère}}$ année – Génie mathématique**
Matière : **Topologie et Analyse Fonctionnelle**
Durée : **3h**
Responsable : **Constanza Rojas-Molina; Nisrine Fortin; Jordy palafox**

En cas de problème informatique pendant l'épreuve *(connexion internet, ...) : le candidat devra impérativement contacter (avant la fin de l'épreuve/dépôt), l'adresses mail suivantes :*

Cergy: *constanza.rojas-molina@u-cergy.fr crojasmo@u-cerfy.fr (Constanza)*

CONSIGNES : Évaluation à distance

1. L'usage d'un ordinateur est autorisé et nécessaire :
   - *récupération du sujet sur AREL,*
   - *scan/photo de votre copie :* ***chaque feuille doit être numérotée / nombre total de feuilles****,*
   - *soumettre* ***un seul fichier PDF****. Utiliser un logiciel à télécharger ou bien un site web pour combiner/fusionner les fichiers dans un seul fichier PDF. Les fichiers ZIP ne seront pas acceptés.*
   - *dépôt sur AREL : Archive intitulée Groupe-NOM-Prenom et contenant tous vos écrits.*
2. Le sujet de l'examen sera visible sur Arel dans la matière associée à cet examen à 14h15 et le dépôt de votre travail sera arrêté à 18h00. Aucun dépôt ne sera possible au delà de cette heure. *L'envoie des fichiers au dela de 18h00 entraînera une penalisation sur la note finale*
3. L'usage des supports de cours et TD de topologie et analyse fonctionnelle est autorisé.
4. Le barème est signalé à titre indicatif.
5. La **qualité de la rédaction** sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées. Des **copies semblables** ou plagiat des sites d'internet **sera fortement penalisé sur la note finale, jusqu'à l'annulation de l'examen**.
6. Le sujet d'examen est composé de quatre exercices indépendants.
7. VEUILLEZ RENDRE DES FEUILLES INDÉPENDANTES PAR EXERCICE. METTRE UN EXERCICE PAR FEUILLE ET NE PAS MÉLANGER LES EXERCICES SUR LA MÊME FEUILLE.

EXERCICE 1 (5 points) Soit $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ un ensemble non vide dont tous les élèments sont distincts. On définit les classes des parties $\mathscr{T} = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ et $\mathscr{U} = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$.

1. Montrer que $\mathscr{T}$ définit bien une topologie sur Ω. Est-ce que $\mathscr{U}$ définit une topologie sur Ω? Justifier vos réponses.

2. Décrire les voisinages de a et de b par rapport à $\mathscr{T}$.

3. Décrire l'adhérence, l'intérieur et la frontière de l'ensemble $\{a, b, c\}$ par rapport à $\mathscr{T}$. Justifier votre réponse. Est-ce que cet ensemble est dense?

4. Décrire l'adhérence et l'intérieur des ensembles $\{a, b\}$, et $\{b, e\}$ par rapport à $\mathscr{T}$. Déterminer si ces ensembles sont des ouverts ou des fermés, ou non-ouverts, non-fermés par rapport à $\mathscr{T}$.

5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω de terme général $x_n = \mathrm{a}$ pour tout entier n. Montrer que b est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier votre réponse.

6. Est-ce que $(\Omega, \mathscr{T})$ est un espace topologique séparé ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 (5 points) Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace de matrices carrées d'ordre 2 et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, déterminer une base et la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par $\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j=1,2} |a_{ij}|$, pour $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le 2}$, définit une norme sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer la distance d associéé à la norme $\|\cdot\|_\infty$, et décrire les boules ouvertes associées à la distance d.

4. Est-ce que l'on peut voir $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ comme un espace métrique? et comme un espace topologique? Justifier votre réponse.

5. Montrer que l'application $\det : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par $\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} - \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{21}$ est continue comme application de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), d)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

6. Montrer que le sous-ensemble de matrices $G(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,;\, \det(\mathrm{A}) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

7. On considère le sous-ensemble de matrices $S(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,;\, \det(\mathrm{A}) = 1\}$.

   (a) Montrer que $S(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé, on définit la matrice diagonale $M_k = \left(m_{ij}\right)_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$.

   Montrer que $M_k \in S(\mathbb{R})$ et que $\|M_k\|_\infty$ tend vers ∞ quand $k \to \infty$.

   (c) Montrer que $S(\mathbb{R})$ n'est pas compact dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 3 (5 points) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On munit E de la distance uniforme

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \quad d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E.

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier pourquoi la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction de x, notée $f(x)$.
4. Montrer que $f \in \mathrm{E}$.
5. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction f. Conclure.

EXERCICE 4 (5 points) Soient $(\mathrm{H}, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $\mathscr{B} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormée de H. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans H telle que, pour une certaine constante C, $0 < C < 1$, on ait

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n (e_n - f_n) \right\|^2 \leq C^2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$$

pour toute collection finie de nombres $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$.

1. Justifier que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ converge dans H.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle (e_k - f_k)$ est de Chauchy.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{H}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle (e_k - f_k)$ converge dans H.
4. On considère l'application $S : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ donnée par $x \mapsto S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle (e_k - f_k)$.
   (a) Montrer que S est linéaire et continue, et que sa norme vérifie $\|S\| \leq C$.
   (b) On pose $T = id_{\mathrm{H}} - S$, où $id_{\mathrm{H}}(x) = x$, $\forall x \in \mathrm{H}$. Montrer que $T(e_n) = f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que T est inversible et son inverse, qu'on notera U, est donnée par $U = \sum_{m=0}^{\infty} S^m$.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = U^*(e_n)$ où U^* dénote l'adjoint de U. Montrer que $\langle f_k, g_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$ où $\delta_{k\ell} = 1$ si $k = \ell$ et $\delta_{k\ell} = 0$ si $k \neq \ell$.
   (e) Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, g_k \rangle f_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle x, f_\ell \rangle g_\ell$.
   (f) Montrer que si $x \in \mathrm{H}$ est tel que $\langle x, g_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $x = 0$.

   Montrer que si $\langle x, f_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $x = 0$.
   (g) En déduire que les deux familles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont totales dans H.