Département de Mathématiques
Année universitaire 2019-2020

Examen du 07/04/2020

Filière : **Ingénieurs 1$^{\text{ère}}$ année – Génie mathématique**
Matière : **Topologie et Analyse Fonctionnelle**
Durée : **3h**
Responsable : **Constanza Rojas-Molina; Nisrine Fortin; jordy palafox**

En cas de problème informatique pendant l'épreuve *(connexion internet, ...) : le candidat devra impérativement contacter (avant la fin de l'épreuve/dépôt), l'une des adresses mail suivantes :*

Cergy: *constanza.rojas-molina@u-cergy.fr (Constanza)*

Pau: *nfo@eisti.eu; (Nisrine) ou palafoxjordy@gmail.com, (Jordy);*

CONSIGNES : Évaluation à distance

1. L'usage d'un ordinateur est autorisé et nécessaire :
   - *récupération du sujet sur AREL,*
   - *scan/photo de votre copie : **chaque feuille doit être numérotée / nombre total de feuilles**,*
   - *soumettre un seul fichier PDF. Utiliser un logiciel à télécharger ou bien un site web pour combiner/fusionner les fichiers dans un seul fichier PDF,*
   - *dépôt sur AREL : Archive intitulée Groupe-NOM-Prenom et contenant tous vos écrits.*
2. Le sujet de l'examen sera visible sur Arel dans la matière associée à cet examen à 8h45 et le dépôt de votre travail sera arrêté à 12h30. Aucun dépôt ne sera possible au delà de cette heure.
3. L'usage des supports de cours et TD de topologie et analyse fonctionnelle est autorisé.
4. Le barème est signalé à titre indicatif.
5. La **qualité de la rédaction** sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.
6. Le sujet d'examen est composé de quatre exercices indépendants.
7. VEUILLEZ RENDRE DES FEUILLES INDÉPENDANTES PAR EXERCICE. METTRE UN EXERCICE PAR FEUILLE ET NE PAS MÉLANGER LES EXERCICES SUR LA MÊME FEUILLE.

EXERCICE 1 (5 points) Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble non vide dont tous les élèments sont distincts.

1. Décrire la topologie grossière $\mathcal{T}_G$ et la topologie discrète $\mathcal{T}_D$ sur Ω.

2. Soit $\mathcal{T}$ la classe des parties : $\{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{b, c\}\}$.

    (a) Montrer que $\mathcal{T}$ définit bien une topologie sur Ω. Justifier votre réponse.

    (b) Décrire les voisinages de a et de b par rapport à $\mathcal{T}$.

    (c) Décrire l'adhérence, l'interieur et la frontière de l'ensemble $\{a, b\}$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω de terme général $x_n = b$ pour tout entier n.

    (a) Montrer que a est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier votre réponse.

    (b) Montrer que b est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier votre réponse.

    (c) Est-ce que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparé ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 (5 points) Soient (E, d) un espace métrique **compact** et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d\Big(f(x), f(y)\Big) \geq d(x, y)$$

Pour tout $\big(x, y\big) \in E^2$, on considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par

$$x_n \ = f^n(x), \ \ y_n = f^n(y)$$

où f^n désigne l'itéré d'ordre n de f, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

1. Montrer qu'il existe une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $\psi(k) = n_k$ telle que $\big(f^{n_k}(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(f^{n_k}(y)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.

2. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} d\Big(f^{n_{k+1}}(x), f^{n_k}(x)\Big) = 0$ et que $\lim\limits_{k\to+\infty} d\Big(f^{n_{k+1}}(y), f^{n_k}(y)\Big) = 0$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $\varphi(k) = n_{k+1} - n_k$.

    (a) Montrer que $d\Big(x, f^{\varphi(k)}(x)\Big) \leq d\Big(f(x), f^{n_{k+1}-n_k+1}(x)\Big)$.

    (b) En déduire que $d\Big(x, f^{\varphi(k)}(x)\Big) \leq d\Big(f^{n_k}(x), f^{n_{k+1}}(x)\Big)$.

    (c) Montrer que la suite $\big(f^{\varphi(k)}(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x et que la suite $\big(f^{\varphi(k)}(y)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans E.

4. On pose $\delta_n = d(x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

5. En déduire que f est une isométrie.

EXERCICE 3 (5 points) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles, périodiques de période 2π et de carré intégrables sur $[0;2\pi]$,

$$\mathrm{E} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f \text{ est } 2\pi - \text{périodique et } \int_0^{2\pi} f^2(\theta)\,d\theta < +\infty \right\}.$$

On munit E du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2,\ \ \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\,d\theta. \tag{P.S}$$

1. Définir sur E, la norme $\|.\|$ et la distance d associées au produit sacalaire défini par (P.S).
2. **L'objectif de cette question est de montrer que l'espace E est un espace complet par rapport à la distance d.** Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E.
   (a) Démontrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) Soit $\theta \in [0;2\pi]$. Montrer que la suite $\left(f_n(\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy sur $[0;2\pi]$.
   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit x un réel. Justifier pourquoi la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction de x, qu'on notera $f(x)$.
   (e) Montrer que $f \in \mathrm{E}$.
   (f) Montrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction f. Conclure.
3. L'espace E est-il un espace de Hilbert? de Banach ? justifier votre réponse.

EXERCICE 4 (5 points) Soient $(\mathrm{H}, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $\mathscr{B} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H.

1. Soit $x \in \mathrm{H}$.
   (a) Justifier pourquoi il existe une suite de complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n e_n$.
   (b) Établir, pour tout entier non nul n, l'égalité suivante: $\alpha_n = \langle x, e_n\rangle$.
   (c) Montrer que $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |\langle x, e_n\rangle|^2$.
   (d) En déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge.
2. Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes et $x \in \mathrm{H}$. On pose
$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x | e_k\rangle e_k,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$
   Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\| y_{n+m} - y_n \right\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |\lambda_k \langle x, e_k\rangle|^2$.
3. Supoposons que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   (a) Montrer que $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.
   (b) En déduire sa limite dans H.
   (c) Montrer que l'application f est linéaire et continue où $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \to & \mathrm{H} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k \end{array}$