

**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**  
**ING1 : GMF - GMI**  
**Examen du 07 mai 2020**

**I**

La hauteur maximale de la crue annuelle de la seine est observée très attentivement par les services techniques de la ville de Paris car une crue supérieur à 8 mètres serait catastrophique. On a modélisé cette hauteur par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi de Rayleigh c'est-à-dire avec la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} \exp\left(\frac{-x^2}{2\theta}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\theta$  est un paramètre inconnu (on trouvera les moments de  $X$  à la fin de l'énoncé).  
 Durant une période de  $n$  années, on a observé les hauteurs de crues  $X_1, \dots, X_n$ .

**N.B. chaque question peut être traitée indépendamment des autres.**

1) Montrer que

$$T_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

est un estimateur de maximum de vraisemblance de  $\theta$ .

2)  $T_n$  est-il sans biais ?

3) Etudier la convergence presque sûre de  $T_n$ .

4) Déterminer le risque quadratique de  $T_n$  puis étudier la convergence en moyenne quadratique de  $T_n$ .

5) Quelle est la loi asymptotique de  $T_n$  ?

6)  $T_n$  est-il un estimateur efficace ?

**N.B.**  $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta$ ,  $\text{Var}(X) = (2 - \frac{\pi}{2})\theta$ ,  $\text{var}(X^2) = 4\theta^2$ .

**II**

Une étude de l'INSEE tente de mettre en relation la durée d'occupation d'un logement avec l'âge du locataire. Les résultats après enquête sont présentés dans le tableau suivant :

durée d'occupation Age	< 2 ans	2-9 ans	plus de 9 ans	Total
15-29	1606	1592	140	3338
30-39	1761	5393	1393	8547
40-49	675	3053	5148	8876
50-59	341	1343	5132	6816
60-74	221	1227	7380	8828
75 +	95	393	3836	4324
Total	4699	13001	23029	40729

- 1) Quel test devez vous faire pour étudier le lien entre ces variables ?
- 2) Enoncer les hypothèses nulle et alternative du test.
- 3) Comment calcule-t-on les effectifs théoriques de la distribution conjointe des deux variables ? puis calculer ces effectifs théoriques.
- 4) Si les effectifs observés sur l'échantillon sont égaux aux effectifs théoriques, que peut-on en conclure ?
- 5) Quelle est la statistique du test (variable de décision) ? Expliquer comment on la calcule. Quelle est sa valeur sur l'échantillon ?
- 6) Sous l'hypothèse  $H_0$ , quelle est la loi de la statistique test (sans oublier les degrés de liberté) ?
- 7) Quelle est la conclusion du test pour un risque  $\alpha = 5\%$  ? Justifier votre réponse, connaît-on le risque d'erreur pour cette décision ?

### III

Soit  $X$  la variable aléatoire discrète, à valeur dans  $\mathbb{N} \setminus \{0, \}$  et dont la fonction de masse est définie par :

$$\mathbb{P}(X = x) = (1 - p)^{x-1} p, \quad p \in ]0, 1[$$

On donne  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$  et  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

- 1) Quelle loi suit la variable aléatoire  $X$  ? Donner un exemple d'une expérience aléatoire qui soit modélisée par  $X$ .
- 2) Déterminer  $I(p)$ , l'information de Fisher.
- 3) Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de  $n$  réalisations de  $X$ .
  - a) Donner un estimateur de  $p$  par la méthode du maximum de vraisemblance.
  - b) Construire un estimateur de  $p$  par la méthode des moments (méthode de substitution).
- 4) On suppose que la taille de l'échantillon est assez grande. Donner la loi limite de l'estimateur obtenu en a), puis construire un intervalle de confiance pour  $p$ , de niveau de confiance  $1 - \alpha$ .
- 5) On se propose de tester les hypothèses suivantes :

a)

$$H_0 : p \leq p_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : p > p_0$$

où  $p_0 \in ]0, 1[$  est une constante donnée.

Proposer une solution à ce test, dont on donnera les éléments nécessaires permettant à l'utilisateur de prendre une décision à partir d'une valeur observée de la statistique du test sur un échantillon donné et un seuil  $\alpha = 5\%$ .

b) Même questions pour l'hypothèse :

$$H'_0 : p = p_0$$