

**Examen de Rattrapage de Statistique Inférentielle 2019-2020: ING1-MI-MF**  
**Durée 2h**

---

**Rendu.**

- Vous devez déposer sur Arel un document pdf obtenu par scan (lisible) de vos copie ou photo (lisible de bonne qualité) avec numérotation des pages.
  - Le nom de votre fichier pdf doit être de la forme NOM-PRENOM et n'oubliez pas de mettre vos noms et prénoms en entête de votre document.
  - Il sera tenu compte de la clarté de l'exposé, de la rigueur du raisonnement et du soin apporté à la copie.
- 

**Exercice 1-Estimation ponctuelle.** Une variable aléatoire réelle  $X$ , à valeurs positives, suit une loi de Weibull  $W(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , si sa densité est:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad x > 0$$

Dans cet exercice, nous nous intéressons à une loi de Weibull  $W(\frac{1}{2}, \lambda^2)$ . Nous disposons d'un échantillon iid  $(X_1, \dots, X_n)$  de même loi que  $X$ .

1. Montrez que  $\sqrt{X}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .
2. Montrez que

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}$$

est un estimateur du maximum de vraisemblance de  $\lambda$ .

3.  $T_n$  est-il sans biais ?
4.  $T_n$  est-il efficace ?

**Exercice 2-Estimation par Intervalle de confiance.** On veut garantir l'anonymat dans certaines enquêtes par sondage. Admettant que l'on cherche à savoir quelle est la proportion  $p$  de personnes qui remplissent leur déclaration fiscale de façon honnête. On demande alors à chaque personne interrogée de se retirer dans une pièce et de jouer à pile ou face de la façon suivante :

- Si elle obtient "pile", elle doit répondre honnêtement par "oui" ou par "non" à la question : "Votre déclaration fiscale est-elle honnête ?"
- Si elle obtient "face", elle doit lancer la pièce à nouveau et répondre par "oui" ou par "non" à la question : "Avez-vous obtenu "face" au deuxième tirage."

*Remarque: Si la personne interrogée répond "oui" (resp. "non"), il est impossible à l'enquêteur de savoir à quelle question la réponse est "oui"(resp. "non").*

On note  $p$  la proportion de déclaration fiscales honnêtes dans la population considéré et  $\pi$  la proportion de réponse oui.

1. Montre que

$$\pi = \frac{p}{2} + \frac{1}{4}.$$

2. Soit  $X$  la variable aléatoire "égale au nombre de "oui" dans une enquête menée sur  $n$  personnes. Quelle est la loi de  $X$  ?

3. a) Donner un estimateur de  $\pi$

b) En déduire celui de  $p$  que l'on note  $\hat{P}$ .

4. Calculer  $\mathbb{E}(\hat{P})$  et  $V(\hat{P})$

5. On suppose que  $n$  est assez grand,

a) donner un intervalle de confiance, au niveau  $1 - \alpha$ , pour  $\pi$

b) en déduire celui de  $p$ .

6. Application numérique :  $n = 1000, x = 600$ .

a) Calculer l'intervalle de confiance de  $\pi$  au niveau 95% et en déduire celui de  $p$ .

b) Si on admet que la valeur observée de  $\hat{P}$  soit égale à  $\hat{p} = 0.7$ , on aurait un intervalle de confiance :  $IC_{95\%}(p) = [0.672; 0.728]$ . Comparer ce dernier intervalle avec celui obtenu en 6a). Quel est le prix payé pour la confidentialité ?

**Exercice 3- Test d'hypothèse.** Dans le cadre d'une étude consacrée à la densité du trafic sur internet, nous nous intéressons à la **durée de transfert** (en millisecondes) d'un message d'une taille donnée entre deux sites. Notre objectif est de trouver la distribution de probabilité de cette variable  $D$ . Pour ce faire, nous disposons de 1000 valeurs  $d_i, i = 1, \dots, 1000$ , que nous avons résumées dans le tableau ci-dessous. Pour chaque intervalle  $I$ , ce tableau donne le nombre  $N$  de valeurs  $d_i$  qui y appartiennent. Nous avons aussi calculé la moyenne de toutes ces durées et obtenu  $\mu = 82.62ms$ .

- À l'aide d'arguments graphiques, montrez que l'on peut "raisonnablement" supposer que notre variable suit une loi exponentielle."
- Quelle valeur devons-nous prendre pour le paramètre  $\lambda$  de la loi exponentielle et pourquoi ?
- Quelles sont les hypothèses du test que nous devons effectuer ?
- Quelle est la variable de décision de ce test : sa définition, sa loi, la façon dont on la calcule, et la façon dont on l'utilise pour conclure ?
- Effectuez ce test en prenant comme valeur du risque de première espèce  $\alpha = 5\%$ . Conclusion ?

I	]0,20]	]20,40]	]40,60]	]60,80]	]80,100]	]100,120]	]120,140]	]140,160]
N	210	163	152	105	82	62	47	31
I	]160,180]	]180,200]	]200,220]	]220,240]	]240,260]	]260,280]	]280,300]	]300,320]
N	36	24	24	16	10	7	5	6
I	]320,340]	]340,360]	]360,380]	]380,400]	]400,420]	]420,440]	]440,460]	]460,480]
N	5	3	3	2	2	2	2	1