

---

**Examen de rattrapage du 30 Juin 2016**

L'examen dure 2 heures et seulement deux feuilles A4 manuscrites recto-verso sont autorisées.

**Exercice 1**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = c |xy| \mathbf{1}_A(x, y)$$

où

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

1. Déterminer la constante  $c$  pour que  $f$  soit la densité d'une probabilité sur  $\mathbb{R}^2$ .

*Dans la suite de l'exercice, soient  $y \in [-1, 1]$  et  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire admettant une densité qui est égale à  $f$ .*

2. Déterminer les densités des lois marginales du couple  $(X, Y)$ , notées respectivement par  $f_X$  et  $f_Y$ .

3. Quel est l'ensemble  $D \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathbb{P}((X, Y) \in D) = 1$  ?

4. Montrer l'existence des  $\mathbb{E}[X]$  et  $\mathbb{E}[Y]$ .

5. Calculer  $\mathbb{E}[X]$  et  $\mathbb{E}[Y]$ .

6. Calculer la matrice de covariance de  $(X, Y)$ .

7. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

8. Calculer la fonction de densité conditionnelle de  $X$  sachant  $\{Y = y\}$ .

9. Trouver l'expression de  $\mathbb{E}[X^2 | \{Y = y\}]$ .

10. Montrer que  $\mathbb{E}[\sqrt{(2\mathbb{E}[X^2|Y])^{-1}}] = \pi$ .

**Exercice 2**

Soient  $X$  une variable aléatoire de loi normale standard et  $Z$  une variable aléatoire discrète indépendante de  $X$ .

On suppose que  $Z$  est de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}^*$ . On pose  $Y = ZX$ .

1. Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire de loi gaussienne standard.\*.

2. Considérant  $X + Y$ , montrer que  $(X, Y)$  n'est pas un vecteur gaussien.

3. Montrer que  $X$  et  $Y$  ne sont pas des variables aléatoires indépendantes, mais que  $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Exercice 3**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes.

On pose  $Y_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$  et  $Z_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ .

Supposons que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_k$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_k > 0$ .

1. Trouver la loi de  $Y_n$ .

2. Trouver la loi de  $Z_n$ .

---

\*. i.e.  $\mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = 1)$ .

\*. Indication : ne pas utiliser la formule de transformation d'un couple de variables aléatoires mais plutôt les notions de conditionnement et d'indépendance.