TD 01 : Convergence de Variables Aléatoires

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles indépendantes, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p,\, \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p =: q, \text{ où } 0 < p < 1, p \neq \tfrac{1}{2}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } A_n = \{S_n = 0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

L'évènement A_n est appelé un retour à zéro. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \text{ t.q. la suite } (S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ repasse une infinité de fois en } 0\}.$$

1) Prouver que $\mathbb{P}(A) = 0$.

2) En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de trouver le résultat précédent.

Exercice 2.

Soit X une v.a. uniformément distribuée sur $]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définie la v.a. X_n comme étant uniformément distribuée sur $]0, 1 + \frac{1}{n}[$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$.

Exercice 3.

Soit $S_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ où $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d., de loi uniforme $]0, 1[$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} 0$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Astuce : $\int_0^1 t^m(1-t)^n\, dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

Exercice 4.

- Inégalité de Jensen

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]a, b[$ et admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$. Supposons que g est convexe sur $]a, b[$ et $g \in C^2(]a, b[)$.

Montrer que

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X]).$$

Exercice 5.

- Inégalité de Markov

Soit X une v.a. positive (i.e. $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), continue, d'espérance $E[X] < +\infty$. Alors montrer que

$$\forall t > 0,\, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Application : Soit X une v.a. positive et continue avec $\mathbb{P}(X > 10) = \frac{1}{5}$, montrer que $\mathbb{E}[X] \geq 2$.

TD 02 : Vecteurs Aléatoires

Exercice 1.

Considérons un vecteur aléatoire $(Z_1, Z_2) =: Z$ tel que $Z_1(\Omega) = Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = (0,0)) = (1-p)^2, \quad \mathbb{P}(Z = (1,1)) = p^2,$$

et

$$\mathbb{P}(Z = (0,1)) = \mathbb{P}(Z = (1,0)) = p(1-p),$$

où $p \in]0, 1[$. Montrer que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

Exercice 2.

Soient X et Y deux v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Calculer $f_{(U,V)}(u, v)$ où $(U, V) = (X + Y, X - Y)$.

Exercice 3.

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire avec une densité conjointe f. Trouver la fonction de densité de $Z := XY$.

Exercice 4.

Soient X et Y deux v.a. t.q. (X, Y) admette une fonction de densité conjointe $f_{(X,Y)}$ définie par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c(2x + y)\mathbf{1}_{]2,6[\times]0,5[}(x, y).$$

1) Que vaut c ?
2) Trouvez les fonctions de répartitions marginales F_X et F_Y.
3) Trouver les fonctions de densités marginales f_X et f_Y.
4) Calculer $\mathbb{P}(X > 3, Y > 2)$, $\mathbb{P}(X > 3)$ et $\mathbb{P}(X + Y < 4)$.
5) Soient $x > 6$ et $y \in]0, 5[$, calculer $F_{(X,Y)}(x, y)$ et $f_{(X,Y)}(x, y)$. En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

TD 03 : encore des vecteurs aléatoires mais avec densités

Exercice 1.

Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ [1] On pose $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

1. Montrez que Y est un vecteur aléatoire admettant une densité et trouvez sa fonction de densité.

2. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

Soit X_1, X_2, X_3 trois v.a.r. identiquement distribuées, de fonction de densité $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

1. Trouvez la fonction de densité de (Y_1, Y_2, Y_3), où

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3,\ Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2},\ \text{et } Y_3 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}.$$

2. Y_1, Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

1. C'est-à-dire que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont à valeurs réelles, indépendantes et identiquement distribuées.

Rappel : Pour $A \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $f_A(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

TD 04

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes avec X de loi normale centrée réduite (i.e. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et Y de loi Gamma de paramètre $n/2$ et $\beta = 1/2$ avec $n \in \mathbb{N}$ (i.e. $f_Y(y) = y^{\alpha-1} \frac{\beta^\alpha \, e^{-\beta \, y}}{\Gamma(\alpha)}$ pour tout $y \in [0, +\infty[$ [1]).

Quelle est la loi de

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y n^{-1}}}$$

?

Exercice 2.

Soient X et Y deux v.a.r de variances finies et soit

$$Z = \frac{1}{\sigma_Y} Y - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X} X.$$

Montrer que $\sigma_Z^2 = 1 - \rho_{X,Y}^2$, et en déduire que si $\rho_{X,Y} = \pm 1$, alors Y est une v.a.r. qui est une fonction affine de X non constant p.-s.

Exercice 3.

Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire de dimension 3 admettant une densité $f_{(X,Y,Z)}$ définie par :

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \frac{1 - \prod_{w \in \{x,y,z\}} \sin(w) \mathbf{1}_{[0,2\pi]}(w)}{8\pi^3}$$

Montrer que X, Y, Z sont 2 à 2 indépendants mais pas indépendants.

Exercice 4.

Montrer que pour $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indépendantes, d'espérances égales à 0, et de moments d'ordre 3 finis, alors

$$\mathbb{E}[(X_1 + \ldots + X_n)^3] = \mathbb{E}[X_1^3] + \ldots + \mathbb{E}[X_n^3].$$

1. c'est aussi la loi du χ^2 à n degrés de liberté, i.e. loi de $\sum_{i=1}^k Y_i^2$ où $(Y_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. de loi normale centrée réduite.