

**Examen de 9 Mai 2016 : une correction parmi tant d'autres**

**Exercice 1.** Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire admettant une densité notée par  $f$ , définie par  $f(x, y) = 2(xy)^{-2} \mathbf{1}_A(x, y)$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , où  $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > v > 1\}$ .

Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.

**1) Les lois conjointes et marginales**

**(4 pts) a.** Montrer que la loi marginale de  $X$  est définie par la fonction de densité  $f_X$  où  $f_X(x) = \frac{2}{x^2} (1 - \frac{1}{x}) \mathbf{1}_{]1, +\infty[}(x)$ .

**Solution:**

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \mathbf{1}_{]1, +\infty[}(x) \int_1^x \frac{2}{x^2 y^2} dy = \frac{2}{x^2} \left[ -\frac{1}{y} \right]_1^x = \frac{2}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbf{1}_{]1, +\infty[}(x).$$

**(4 pts) b.** Calculer  $\mathbb{P}(XY < 4)$ , tout en faisant attention aux bornes d'intégration.

**Solution:** Comme  $1 < y < x$ , on obtient  $xy < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{y}$ , i.e.  $x \in ]y, \frac{4}{y}[$ . D'où  $y < \frac{4}{y}$  et  $y > 1$  donnent  $1 < y < 2$ . Finalement

$$\mathbb{P}(XY < 4) = \int_1^2 \int_y^{\frac{4}{y}} \frac{2}{x^2 y^2} dx dy = \int_1^2 \frac{2}{y^2} \int_y^{\frac{4}{y}} \frac{1}{x^2} dx dy = \int_1^2 \frac{2}{y^2} \left[ -\frac{1}{x} \right]_y^{\frac{4}{y}} dy,$$

i.e.

$$\mathbb{P}(XY < 4) = \int_1^2 \left( \frac{2}{y^3} - \frac{1}{2y} \right) dy = \left[ -\frac{1}{y^2} - \frac{\ln(y)}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

**2) Distribution conditionnelle**

**(2 pts) a.** Donner la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $\{X = x\}$ .

**Solution:**  $f_{Y|\{X=x\}} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$  t.q.  $f_X(x) \neq 0$ , i.e. pour tout  $x > 1$ . D'où

$$f_{Y|\{X=x\}}(y) = \frac{x}{y^2(x-1)} \mathbf{1}_A(x, y).$$

**(4 pts) b.** Calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[Y|X]$ .

**Solution:** Soit  $x > 1$ , alors on a d'après la définition vue en cours,

$$\mathbb{E}[Y|\{X = x\}] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|\{X=x\}}(y) dy = \frac{x}{x-1} \int_1^x \frac{1}{y} dy = \frac{x}{x-1} [\ln(|y|)]_1^x. \text{ Ce qui donne}$$

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X \ln(X)}{X-1}.$$

**(2 pts) c.** En déduire la valeur de  $\mathbb{E}[Y]$ .

**Solution:** D'après le théorème vu en cours, on a  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$ .

Donc ici on a  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{X \ln(X)}{X-1}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{x \ln(x)}{x-1} f_X(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{2 \ln(x)}{x^2} dx$ . Maintenant utilisant une intégration par parties, avec  $u(x) = \ln(x)$  et  $v(x) = -\frac{1}{x}$ ,

$$\mathbb{E}[Y] = \left[ -\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = \left[ -\frac{2}{x} \right]_1^{+\infty}, \text{ i.e. } \mathbb{E}[Y] = 2.$$

**3) Loi du produit  $XY$ .**

Soit le couple  $(U, V)$  défini par  $U = XY$  et  $V = X$ .

**(2 pts) a.** Justifier que le support de  $(U, V)$  est  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 1 < v < u < v^2\}$ .

**Solution:** En posant  $u = xy$  et  $v = x$  on obtient les nouvelles conditions en  $u$  et  $v$ , à savoir

- $x > 1 \Rightarrow v > 1$ ,
- $y > 1 \Rightarrow u > v > 1$ ,
- $x > y \Rightarrow v > \frac{u}{v} \Rightarrow v^2 > u$  (car  $v > 1$  et  $u > 1$ ), d'où  $v > \sqrt{u}$ .

Donc le support de  $(U, V)$  est bien  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 1 < v < u < v^2\}$ . Il est utile de remarquer qu'il est égale à  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 1 < \sqrt{u} < v < u\}$ .

**(4 pts) b.** Donner la fonction de densité du couple  $(U, V)$ .

**Solution:** Comme  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g^{(1)}}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g^{(2)}}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g^{(2)}}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x = -v$  où  $g(x, y) = (x, xy)$ . D'où d'après le Théorème 18 du cours,

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{|-v|} f\left(v, \frac{u}{v}\right) = \frac{2}{vu^2}.$$

**(2 pts) c.** En déduire la fonction de densité de  $U$ .

**Solution:** Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u, v) dv = \mathbf{1}_{]1, +\infty[}(u) \int_{\sqrt{u}}^u \frac{2}{vu^2} dv = \frac{2}{u^2} [\ln(v)]_{\sqrt{u}}^u = \frac{\ln(u)}{u^2} \mathbf{1}_{]1, +\infty[}(u).$$

**Exercice 2.** On considère  $(X_1, X_2)$  un vecteur gaussien centré de matrice de covariance  $\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ , avec  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$  et  $\rho \in [-1, 1]$ . On considère  $\varepsilon \sim \mathcal{B}(1/2)$  une variable aléatoire de Bernoulli indépendante de  $(X_1, X_2)$  et on définit  $(Y_1, Y_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} (X_1, X_2)$ .

**(3 pts) a.** Donner l'expression de la fonction caractéristique du vecteur  $(Y_1, Y_2)$ , c'est-à-dire celle de  $\phi_{(Y_1, Y_2)}$  où  $\phi_{(Y_1, Y_2)}(a, b) = \mathbb{E}[e^{i(aY_1 + bY_2)}]$  pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Solution:** Comme  $\varepsilon$  est une variable aléatoire réelle discrète de loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ , i.e.  $\mathbb{P}(\varepsilon = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\varepsilon=0\}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}] = \frac{1}{2}$ . De plus, d'après la définition de  $\varepsilon$  on a presque-sûrement  $\mathbf{1}_{\{\varepsilon=0\}} + \mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}} = 1$ . Pour se sortir des calculs et avoir un raisonnement il faut utiliser les données de l'énoncé : utilisons alors l'indépendance en simplifiant l'expression de la fonction caractéristique du vecteur  $(Y_1, Y_2)$  :

On a  $Y_1 = \varepsilon X_1 + (1 - \varepsilon)X_2$  et  $Y_2 = (1 - \varepsilon)X_1 + \varepsilon X_2$ . Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  fixés, alors

$$\begin{aligned} \phi_{(Y_1, Y_2)}(a, b) &= \mathbb{E}\left[e^{i((a\varepsilon + b(1-\varepsilon))X_1 + (b\varepsilon + a(1-\varepsilon))X_2)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i((a\varepsilon + b(1-\varepsilon))X_1 + (b\varepsilon + a(1-\varepsilon))X_2)} (\mathbf{1}_{\{\varepsilon=0\}} + \mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i((a\varepsilon + b(1-\varepsilon))X_1 + (b\varepsilon + a(1-\varepsilon))X_2)} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=0\}}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[e^{i((a\varepsilon + b(1-\varepsilon))X_1 + (b\varepsilon + a(1-\varepsilon))X_2)} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i((a \times 0 + b(1-0))X_1 + (b \times 0 + a(1-0))X_2)} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=0\}}\right] \text{ iciii} \\ &\quad + \mathbb{E}\left[e^{i((a \times 1 + b(1-1))X_1 + (b \times 1 + a(1-1))X_2)} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i(bX_1 + aX_2)} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=0\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{i(aX_1 + bX_2)} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i(bX_1 + aX_2)}\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\varepsilon=0\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{i(aX_1 + bX_2)}\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}\right] \end{aligned}$$

car  $\varepsilon$  et  $(X_1, X_2)$  sont indépendants. D'où  $\phi_{(Y_1, Y_2)}(a, b) = \phi_{(X_1, X_2)}(b, a)\mathbb{P}(\varepsilon = 0) + \phi_{(X_1, X_2)}(a, b)\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}(\phi_{(X_1, X_2)}(b, a) + \phi_{(X_1, X_2)}(a, b))$ . Comme  $(X_1, X_2)$  est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance  $\Gamma$ , d'où d'après le cours (voir Théorème 32, page 45), on a

$$\phi_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = e^{i(x_1, x_2)(0,0)^T - \frac{1}{2}(x_1, x_2)\Gamma(x_1, x_2)^T} = e^{-\frac{1}{2}((x_1\sigma_1)^2 + 2\rho(x_1\sigma_1)(x_2\sigma_2) + (x_2\sigma_2)^2)}.$$

**(2 pts) b.** Montrer que  $\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[Y_2] = 0$  et que la matrice de covariance du vecteur  $(Y_1, Y_2)$  vaut  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  où  $a = \frac{1}{2}(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})$  et  $b = \rho\sigma_1\sigma_2$ .

**Solution:** On a par le même argument en décomposant suivant les valeurs de  $\varepsilon$  et en utilisant l'indépendance,  $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ ,  $\mathbf{Var}(Y_i) = \mathbb{E}[Y_i^2] = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  et  $\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) =$

$\mathbb{E}[Y_1 Y_2] = \rho \sigma_1 \sigma_2$ . D'où en notant  $\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$  et  $\bar{\Gamma} = \frac{1}{2}(\Gamma + \hat{\Gamma})$  on obtient que la matrice de covariance du vecteur  $(Y_1, Y_2)$  vaut  $\bar{\Gamma}$ .

**(2 pts) c.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur  $(Y_1, Y_2)$  soit un vecteur gaussien.

**Solution:** D'après question précédente,  $Y$  est un vecteur gaussien si et seulement si  $\phi_{(Y_1, Y_2)}(y) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}y\Gamma y^T} + e^{-\frac{1}{2}y\hat{\Gamma}y^T})$  où  $y = (y_1, y_2)$ . Comme la fonction exponentielle est convexe, i.e.  $e^{\lambda A + (1-\lambda)B} \leq \lambda e^A + (1-\lambda)e^B$ , on obtient alors  $e^{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B} \leq \frac{1}{2}(e^A + e^B)$ . Sachant que l'inégalité devient égalité si et seulement si  $A = B$ , on obtient alors

$$\Gamma = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow (Y_1, Y_2) \text{ est gaussien} \Leftrightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

**(3 pts) d.** Dans le cas où  $(Y_1, Y_2)$  est un vecteur gaussien, donner l'expression de la fonction de densité de  $(Y_1, Y_2)$  notée par  $f_{(Y_1, Y_2)}$ .

**Solution:** On a  $\bar{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$ .

D'où  $(\bar{\Gamma})^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{\Gamma})} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\rho)\sigma_1^4} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$  et

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det(\bar{\Gamma})}} e^{-\frac{1}{2}y(\bar{\Gamma})^{-1}y^T}.$$