EISTI 2019-2020
ING1 - GM : Probabilités

TD 4 - de l'entraînement

Exercice 1 *Soit* $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *une variable aléatoire tel que* $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On suppose que X *admet une variance.*

1. *Montrer que* $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k)$ *converge.*

2. *En déduire que* $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \mathbb{P}(X > n) = 0$.

3. *Montrer que* $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X > k)$.

Astuce : $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 2 *Soit* $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Rappeler l'espérance et la variance de X, *et montrer que* $\mathbb{P}(X \leq \lambda/2) \leq 4/\lambda$.

Astuce : utiliser une inégalité vue en cours.

Exercice 3 *Soient* $\alpha, \beta \in]0, 1[$ *deux réels fixés. Soit* $\Omega = \mathbb{N}^2$. *Pour tout* $(i, j) \in \Omega$, *on pose* $p_{i,j} = \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j$.

1. *Montrer qu'en posant* $\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = p_{i,j}$ *pour tout* $(i, j) \in \Omega$, *on définit une mesure de probabilité sur* Ω *muni de la tribu* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Pour tout $(i, j) \in \Omega$, *on pose* $X((i, j)) = i$ *et* $Y((i, j)) = j$.

2. *Déterminer la loi de* X *et la loi de* Y.

3. *Calculer* $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ *et* $\mathbb{P}(X > Y)$.