Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Probabilité

Cours 1 – Axiomes de probabilités

2019-2020

Espace Probabilisable

Expérience aléatoire

Une expérience est qualifiée d'aléatoire si on ne peut prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents.

♣ On représente le résultat de cette expérience comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles : Ω est appelé l'ensemble fondamental ou encore l'univers des possibles.

▷ Ainsi à une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés, on peut associer l'ensemble $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$ à 21 éléments.

Un événement

Un événement est une assertion ou une proposition logique relative au résultat de l'expérience.

- Exemple : La somme des points est supérieure à 10. On dira qu'un événement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie.

- À la réalisation d'un événement, on peut donc associer tous les résultats de l'épreuve correspondante. Ainsi la somme est supérieure ou égale à 10 correspond l'ensemble de résultats

$$\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\},$$

c'est-à-dire une partie de l'ensemble fondamental Ω pour laquelle cet événement est réalisé.

Événements

- **Événements incompatibles :** Soient deux événements A et B, on dit que ces événements sont incompatibles ou mutuellement exclusifs, si la réalisation de l'un exclut celle de l'autre, autrement dit si $A \cap B = \emptyset$.

- **Système complet :** Un ensemble d'événements $A_1, \ldots, A_n$ forme un système complet d'événements si les parties $A_1, \ldots, A_n$ de Ω constitue une partition de Ω :

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{pour } i \neq j \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

- **Événement élémentaire :** On appelle événement élémentaire une partie de Ω réduite à un seul événement.

On les note en général $\{\omega\}$. Les événements élémentaires forment une partition de Ω. De plus tout événement A peut s'écrire comme la réunion d'événements élémentaires :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

Algèbre des évènements

Nous allons supposer pour l'instant que l'ensemble des événements constitue une classe $\mathcal{A}$ de parties de Ω dont nous allons définir les propriétés en nous référant à des besoins usuels. Nous en profiterons pour introduire le vocabulaire probabiliste.

À tout événement A, on associe son événement contraire noté $\overline{A}$ tel que si A est réalisé alors $\overline{A}$ ne l'est pas, et réciproquement.

Il sera donc naturel d'exiger de $\mathcal{A}$ la propriété suivante :

$$\boxed{A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}}$$

$\overline{A}$ est donc représenté dans Ω par la partie complémentaire de A.

- Par exemple si A est l'événement "la somme des dés est supérieure ou égale à 10", alors $\overline{A}$ est l'événement la somme des dés est inférieure strictement à 10.

Algèbre des évènements

Étant donnés deux événements A et B, on est conduit à s'intéresser à leur union "A ou B", c'est à dire $A \cup B$.

Il sera donc naturel d'exiger de $\mathcal{A}$ la propriété suivante :

$$\boxed{A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A},}$$

et ceci d'une manière générale pour un nombre quelconque d'événements.

▷ Par exemple, si l'événement A est la somme des dés est supérieure ou égale à 10 et l'événement B est obtenir au moins un 6, alors $A \cup B$ correspond à l'ensemble des résultats

$$\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}\,.$$

Algèbre des évènements – Axiomes

Nous pouvons maintenant définir la classe $\mathcal{A}$ par les trois axiomes suivants :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Stabilité par complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, \quad \overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. Stabilité par union dénombrable : $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Les propriétés précédentes définissent ce qu'on appelle une σ-algèbre de Boole ou une tribu.

Espace probabilisable

On appelle espace probabilisable le couple $(\Omega; \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ constitue une tribu de parties de Ω.

Espace Probabilisé

Espace probabilisé

À chaque événement on associe un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité. Afin d'éviter toute discussion de nature philosophique, la théorie moderne des probabilités repose sur l'axiome suivant.

Mesure de probabilité

On appelle mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ une fonction d'ensembles positive

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0; 1]$$

définie sur la tribu $\mathcal{A}$ telle que

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles A_n, $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Espace probabilisé– Propriétés

- De la définition de la probabilité, on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$	$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) = 0$	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

- Dans le cas général de l'union de plus de deux événements, nous avons l'inégalité de Boole,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).}$$

- Théorème des probabilités totales : Soit $(B_i)_{i=1,\ldots,n}$ un système complet d'événements, alors pour tout événement A, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i).}$$