Une solution de l'Exercice 14 du TD1 :

Sachant que la partie $\mathcal{F}$ est une tribu est faite.

Montrons que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité :

$\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ est évident.

Soit $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ un ensemble d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

on a deux cas :

- $\forall i \in \mathbb{N}$ A_i est dénombrable, et donc $\mathbb{P}(A_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j) = 0$, or $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ est dénombrable d'où $\mathbb{P}(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = 0$, finalement on a bien $\mathbb{P}(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j)$.

- $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que A_i n'est pas dénombrable, et donc pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \neq i$, on a $A_j \subset (\mathbb{R} \setminus A_i)$ car A_i et A_j sont disjoints, donc $A_j \subset A_i^c$, comme A_i n'est pas dénombrable et que c'est élément de $\mathcal{F}$, d'où A_i^c est dénombrable, donc A_j est également dénombrable, finalement $\mathbb{P}(A_j) = 0$ pour tout $j \neq i$, et donc $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Comme $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ n'est pas dénombrable et que c'est un élément de $\mathcal{F}$, d'où son complémentaire est dénombrable et donc $\mathbb{P}(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = 1$, d'où $\mathbb{P}(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j)$.