

TD 1

Exercice 1 Soit Ω un ensemble fini. Montrer que la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω est également finie.

Exercice 2 Soit $(\mathcal{G}_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille quelconque de tribus sur l'ensemble Ω .
Montrer que $\mathcal{H} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha$ est aussi une tribu.

Exercice 3 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties de Ω . Montrer que

a) $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

b) $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

Exercice 4 Soit \mathcal{A} une tribu et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} . Montrer que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$; $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Exercice 5 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de partie de Ω . Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \setminus \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}.$$

Pour tous les exercices suivants, on considère un espace Ω , une tribu \mathcal{A} de cet espace, et une probabilité \mathbb{P} sur cette tribu; les parties A, B, A_i , etc. sont toutes supposées appartenir à \mathcal{A}

Exercice 6 Si $A \cap B = \emptyset$, montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exercice 7 Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 8 Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$.

Exercice 9 Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 10 (Identité de Poincaré) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n),$$

où par exemple, $\sum_{i < j}$ signifie la somme pour toutes les parties d'indices (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$.

Exercice 11 Montrer que si $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$, on a nécessairement $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

Exercice 12 (Sous-additivité.) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

pour chaque n , et aussi que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 13 (*Inégalités de Bonferroni.*) Montrer que

$$a) \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

$$b) \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

Exercice 14 Montrer que $\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ est une tribu sur \mathbb{R} .

On définit une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ par $\mathbb{P}(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mathbb{P}(A) = 1$ si A^c est dénombrable.

Montrer que \mathbb{P} définit une mesure de probabilité.