Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Probabilité

Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilités sur un espace fini ou dénombrable

Transcrit par : Nisrine Fortin
Référence: support de cours – Yalçin Aktar

EISTI CERGY - PAU

Introduction

Soient **A** et **B** deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- La fréquence $f_n(\mathbf{A})$ de réalisation de **A** lorsqu'on répète n fois la même expérience, converge (en un sens à préciser !) vers la probabilité $\mathbb{P}(\mathbf{A})$, qui quantifie "les chances de voir **A** réalisé".

- Supposons maintenant qu'on sache que **B** est réalisé. Les chances de voir **A** réalisé vont changer et être quantifiées par un nouveau nombre $\mathbb{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B})$,

  "la probabilité de **A** sachant **B**" :

  on peut à nouveau considérer la fréquence de **A** lorsque l'expérience est répétée n fois, sauf qu'il faut calculer cette fréquence sur l'ensemble des expériences où **B** se réalise.

- Il est ainsi naturel de considérer le nombre de fois où **A** et **B** sont réalisés, c'est-à-dire $nf_n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$; pour obtenir une fréquence il convient de diviser ce nombre par le nombre d'occurrences de **B**, i.e. $nf_n(\mathbf{B})$, de sorte à avoir

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \approx \frac{nf_n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{nf_n(\mathbf{B})} = \frac{f_n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{f_n(\mathbf{B})}.$$

Soient **A** et **B** deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- La définition ci-dessous est tirée de cette relation en "prenant la limite en n".

- En particulier, il se peut que le fait de savoir que **B** est réalisé ne donne aucune information sur la réalisation de **A** : on dit alors que **A** est "indépendant" de **B**, et cela se traduit par le fait que $\mathbb{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A})$. Et donc $\frac{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbb{P}(\mathbf{B})} = \mathbb{P}(\mathbf{A})$, donc

$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B}).$$

Nous allons maintenant introduire les définitions proprement dites en commençant par l'indépendance.

Indépendance

Indépendance d'événements

- Deux événements **A** et **B** sont indépendants si la connaissance du fait que **B** est réalisé ne change pas la probabilité de **A**, ce qui revient à dire que

$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B}).$$

- Une famille quelconque $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ d'événements est indépendante si

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(\mathbf{A}_j)$$

pour tout sous-ensemble fini J de I.

Remarque

Si les événements $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ sont indépendants, ils sont aussi deux à deux indépendants, ce qui signifie que $\mathbf{A}_i$ et $\mathbf{A}_j$ sont indépendants pour tous i, j avec $i \neq j$, mais la réciproque est fausse.

Indépendance d'événements – Exemple 1

On choisit une carte au hasard parmi 52 cartes.

$$\mathbf{A} = \{\text{la carte est un cœur}\} \quad \text{et} \quad B = \{\text{la carte est une dame}\}.$$

Un modèle naturel pour cette expérience consiste à affecter la probabilité $\frac{1}{52}$ au choix de chacune des cartes. Par additivité,

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \frac{13}{52}, \quad \mathbb{P}(\mathbf{B}) = \frac{4}{52} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{1}{52}$$

$\mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B}) = \frac{52}{52^2} = \frac{1}{52} = \mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$, donc **A** et **B** sont indépendants.

Indépendance d'événements – Exemple 2

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{4}$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. On considère $\mathbf{A} = \{1, 2\}$, $\mathbf{B} = \{1, 3\}$ et $\mathbf{C} = \{2, 3\}$.

- $\mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$ donc
$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B}).$$
- $\mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4}$ donc
$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{C}).$$
- $\mathbb{P}(\mathbf{B})\mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4}$ donc
$$\mathbb{P}(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = \mathbb{P}(\mathbf{B})\mathbb{P}(\mathbf{C}).$$

A, **B** et **C** sont donc deux à deux indépendants.

- $\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = P(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\mathbf{A}) \times \mathbb{P}(\mathbf{B}) \times \mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{1}{8}$ et $0 \neq \frac{1}{8}$, donc **A**, **B** et **C** ne sont pas (mutuellement) indépendants.

Indépendance d'événements

♣ **Théorème.** Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont indépendants, il en est de même de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^c$, de $\mathbf{A}^c$ et $\mathbf{B}$, et de $\mathbf{A}^c$ et $\mathbf{B}^c$.

⇝ **Démonstration.** $\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c) = \mathbb{P}(\mathbf{A}) - \mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$.

Comme $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont indépendants, alors $\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B})$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c) = \mathbb{P}(\mathbf{A}) - \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}(\mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A})\left(1 - \mathbb{P}(\mathbf{B})\right) = \mathbb{P}(\mathbf{A})\mathbb{P}\left(\mathbf{B}^c\right).$$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Pour tous événements **A** et **B** tels que $\mathbb{P}(\mathbf{B}) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de **A** sachant **B** est définie par

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}\right) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathbb{P}(\mathbf{B})}$$

Probabilité conditionnelle sachant un événement

Supposons que $\mathbb{P}(\mathbf{B}) > 0$.

1. **A** et **B** sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}\right) = \mathbb{P}(\mathbf{A})$.
2. L'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \ni \mathbf{A} \mapsto \mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}\right) \in [0; 1]$ définit une nouvelle mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$, appelée la "probabilité conditionnelle sachant **B**".

Probabilité conditionnelle

Théorème des probabilités composées

Soient $\mathbf{A}_0 = \Omega$ et n un entier naturel, $n \geq 2$. On pose $I_n = [\![1; n]\!]$. Si $\mathbf{A}_i$ sont des événements de $\mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I_{n-1}} \mathbf{A}_i\right) > 0$ alors

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{A}_n) = \mathbb{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbb{P}\left(\mathbf{A}_2 \middle| \mathbf{A}_1\right)\mathbb{P}\left(\mathbf{A}_3 \middle| \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2\right) \ldots \mathbb{P}\left(\mathbf{A}_n \middle| \mathbf{A}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{A}_{n-1}\right).$$

Démonstration. Par récurrence.

Probabilité conditionnelle

Formule de probabilités totales

Pour tout événement $\mathbf{A}$ et toute partition $(\mathbf{B}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'évenements telle que $\mathbb{P}(\mathbf{B}_i) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}_i)\,\mathbb{P}(\mathbf{B}_i)$$

Démonstration. $\mathbf{A} = \Omega \cap \mathbf{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} (\mathbf{A}\cap\mathbf{B}_i)$ car $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbf{B}_i$. Comme les $\mathbf{B}_i$ sont disjoints 2 à 2 alors $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}_i$ sont disjoints 2 à 2. On obtient par σ-additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} (\mathbf{A}\cap\mathbf{B}_i)\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}_i)\,\mathbb{P}(\mathbf{B}_i)$$

Probabilité conditionnelle

Théorème de Bayes, ou de "probabilité des causes"

Pour tout événement $\mathbf{A}$ et toute partition $(\mathbf{B}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'évenements telle que $\mathbb{P}(\mathbf{A}) > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{B}_i \middle| \mathbf{A}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_i\right)\mathbb{P}(\mathbf{B}_i)}{\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_j\right)\mathbb{P}(\mathbf{B}_j)}.$$

Démonstration. $\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_j\right)\mathbb{P}(\mathbf{B}_j) = \mathbb{P}(\mathbf{A})$ donc

$$\frac{\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_i\right)\mathbb{P}(\mathbf{B}_i)}{\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \middle| \mathbf{B}_j\right)\mathbb{P}(\mathbf{B}_j)} = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}_i)}{\mathbb{P}(\mathbf{A})} = \mathbb{P}\left(\mathbf{B}_i \middle| \mathbf{A}\right).$$

Probabilités sur un espace fini ou dénombrable

Probabilités sur un espace fini ou dénombrable

Nous supposons que l'espace d'états Ω est fini ou dénombrable, et nous choisissons pour la tribu la classe $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Probabilité sur un ensemble dénombrable

1. Une probabilité sur l'ensemble fini ou dénombrable Ω est caractérisée par ses valeurs sur les singletons :

$$p_w := \mathbb{P}(\{w\}), \quad w \in \Omega.$$

2. Si $(p_w)_{w\in\Omega}$ est une famille de réels indéxée par l'ensemble fini ou dénombrable Ω, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ (nécessairement unique par la propriété 1) sur Ω telle que

$$\forall w \in \Omega, \mathbb{P}(\{w\}) = p_w \text{ si et seulement si } \quad p_w \geq 0 \text{ et } \sum_{w\in\Omega} p_w = 1.$$

Probabilités sur un espace fini ou dénombrable – Exemples

Loi de Poisson

On considère $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{P}(\{w\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^w}{w!}$ pour $w \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité et est appelée la loi de Poisson de paramèrte $\lambda > 0$.

La loi de Poisson décrit le nombre d'apparitions d'un phénomène aléatoire dans un intervalle de temps fixé.

Loi géométrique

On considère $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et $\mathbb{P}(\{w\}) = (1-\alpha)^{w-1}\alpha$ pour $w \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité et est appelée la loi géométrique de paramèrte $\alpha \in [0, 1[$.

La loi géométrique décrit la probabilité d'obtenir dans une succession de w épreuves de Bernoulli, $w-1$ échecs suivis d'un succès.

Probabilité uniforme

Probabilité uniforme

On dit que la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace fini Ω est uniforme si $p_w = \mathbb{P}(\{w\})$ ne dépend pas de w. Dans ce cas il est immédiait que

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathrm{card}(\mathbf{A})}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

où $\mathrm{card}(\mathbf{A})$ désigne le "cardinal", ou nombre de points, de $\mathbf{A}$.