EISTI 2019-2020
ING1 - GM : Probabilités

TD 2

Dans tous les exercices l'espace de probabilité est fixé, et A, B, A_n, etc. sont des événements.

Exercice 1 *Montrer que si* $A \cap B = \emptyset$*, alors* A *et* B *ne sont pas indépendants, sauf si* $\mathbb{P}(A) = 0$ *ou* $\mathbb{P}(B) = 0$.

Exercice 2 *Si* $\mathbb{P}(C) > 0$*, montrer que* $\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(A \cap B|C)$.

Exercice 3 *Si* $\mathbb{P}(C) > 0$ *et si les* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *sont deux à deux disjoints, montrer que* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i|C) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i|C)$.

Exercice 4 *Soit* $0 < \mathbb{P}(B) < 1$*. Montrer que* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$.

Exercice 5 *Soit* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une suite d'événements indépendants. Montrer que la probabilité pour qu'aucun des* A_i *ne soit réalisé est au plus égale à* $e^{-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)}$.

Exercice 6 *Soit* $\mathbb{P}(A) > 0$*. Montrer que* $\mathbb{P}(A \cap B|A \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B|A)$.

Exercice 7 *Soient* A, B, C *sont indépendants et* $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$*. Montrer que* $\mathbb{P}(C|A \cap B) = \mathbb{P}(C)$.

Exercice 8 *Soit* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \to A$ *et* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \to B$*. Supposons aussi que* $\mathbb{P}(B) > 0$ *et* $\mathbb{P}(B_n) > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*. Montrer que*

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n|B) = \mathbb{P}(A|B)$;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A|B_n) = \mathbb{P}(A|B)$;

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n|B_n) = \mathbb{P}(A|B)$.

Exercice 9 *On dispose de deux urnes, la première contenant* 1 *boule* $\textcolor{red}{\bullet}$ *et* 3 *boules* $\bullet$*, la seconde contenant* 2 *boules* $\textcolor{red}{\bullet}$ *et* 2 *boules* $\bullet$.

L'expérience consiste à choisir d'abord une urne, puis à tirer une boule dans l'urne choisie. On cherche la probabilité de l'événement $A =$ *"on tire une boule* $\bullet$*"*

Exercice 10 *Chaque don de sang est soumis à un test du SIDA. On suppose que ce test a une efficacité de* 99% *(probabilité que le test soit positif pour une personne atteinte du SIDA), et une probabilité de fausse alarme de* 5% *(probabilité que les test soit positif pour une personne non atteinte). Enfin, on suppose la fréquence de séropositivité est* 10^{-4}*. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit atteinte du SIDA ?*

Exercice 11 *Une compagnie d'assurance assure un nombre égal de conducteurs masculins et féminins. Tous les conducteurs (masculins) ont chaque année, la probabilité* α *d'avoir un accident et ceci indépendamment des autres années, et des autres conducteurs. Il en est de même des conductrices, avec une probabilité d'accident égale à* β*. La compagnie sélectionne un/une conducteur/trice au hasard.*

a) Montrer que la probabilité pour que la personne sélectionnée ait un accident cette année est $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

b) Quelle est la probabilité pour que la personne sélectionnée ait un accident deux années consécutives ?

c) Soit A_i *l'événement "la personne sélectionnée a un accident l'année numéro* i*". Montrer que* $\mathbb{P}(A_2|A_1) \geq \mathbb{P}(A_1)$.

d) Trouver la probabilité pour que une année donnée une personne sélectionnée au hasard parmi celles ayant eu un accident soit une conductrice