

TD 6 - Variables aléatoires réelles, espérance et variance

---

**Exercice 1**

Soit  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_n}] = 0$ .

**Exercice 2**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $X$  une v.a. réelle telle que  $X \geq 0$  p.s. et  $\mathbb{E}[X] = 1$ . Définissons  $\mathbb{Q} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A]$ .

1. Montrer que  $\mathbb{Q}$  est une mesure probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

2. Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$ .

3. Montrer que l'autre sens de l'implication est fausse, en utilisant  $\mathbb{P}$  définie via la distribution uniforme sur  $[0, 1]$  et  $X$  définie par  $X(x) = 2 \mathbf{1}_{[0, 1/2]}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $A = ]1/2, 1]$ .

4. En notant  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  l'espérance par rapport à  $\mathbb{Q}$ , montrer que  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XY]$  pour toute v.a.  $Y \geq 0$  p.s. ou bornée.

Pour les trois questions suivantes supposons que  $X > 0$  p.s.

5. Montrer que  $\frac{1}{X}$  est intégrable pour  $\mathbb{Q}$ .

6. Soit  $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $R(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{1}{X} \mathbf{1}_A]$ . Montrer que  $R$  est exactement la probabilité  $\mathbb{P}$ .

7. Montrer que  $\mathbb{Q}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ .

**Exercice 3**

Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne telle que  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

1. Montrer que  $x \mathbb{P}(X > x) \leq \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > x\}}]$ .

2. En déduire que  $\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

3. Calculer  $\mathbb{E}[X^k]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .