Corrigé DS n° 1 du 13/03/2020

EX1 1.) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x-1}\,dx$; 3 singularités en 0, 1 et $+\infty$

soit $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$

découpage en 4 intégrales : $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$; $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$, $I_3 = \int_1^2 f(x)\,dx$

et $I_4 = \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.

. étude de I_1 : f est continue positive sur $]0, \frac{1}{2}]$ et $\frac{\ln x}{x-1} \underset{V(0)}{\sim} -\ln x$

de plus $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow I_1$ converge.

. étude de I_2 et I_3 : $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(x-1+1)}{x-1} \underset{V(1)}{\sim} \frac{x-1}{x-1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

donc I_2 et I_3 convergent (intégrale faussement généralisée en 1).

. étude de I_4 : $\frac{\ln x}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$; f est continue positive sur $[2, +\infty[$

de plus $\frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge

$\Rightarrow I_4$ diverge donc I diverge.

$J = \int_0^{+\infty} e^{-(\ln x)^2}\,dx$; $J_1 = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,dx$, $J_2 = \int_1^{+\infty} e^{-\ln^2 x}\,dx$

. $\lim_{x \to 0} e^{-\ln^2 x} = 0 \Rightarrow J_1$ converge (prolongement par continuité)

. $x \mapsto e^{-\ln^2 x}$ est continue positive sur $[1, +\infty[$ de plus

$x^2 e^{-\ln^2 x} = e^{2\ln x} e^{-\ln^2 x} = e^{\ln x[2-\ln x]} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow e^{-\ln^2 x} \underset{V(+\infty)}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ intégrale de Riemann

convergente $\Rightarrow J_2$ converge donc J converge.

2.) $K = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,dt$; soit $f : t \mapsto \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}$

$K_1 = \int_0^1 f(t)\,dt$; $K_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$

· étude de K_1 $\quad \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} \underset{V(0)}{\sim} \frac{1}{t^\beta}$ $(\alpha > 0)$ $\Rightarrow$ f est continue positive sur $]0,1]$

et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\beta}$ cv si $\beta < 1$

· étude de K_2 $\quad (1+t)^\alpha = t^\alpha\left(1+\frac{1}{t}\right)^\alpha = t^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t^\alpha + \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}} + o\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right)$

$\Rightarrow (1+t)^\alpha - t^\alpha \underset{V(+\infty)}{\sim} \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}}$

d'où $f(t) \underset{V(+\infty)}{\sim} \frac{\alpha}{t^{\beta+1-\alpha}}$; f est continue positive sur $[1,+\infty[$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta+1-\alpha}}$ cv si $\beta+1-\alpha > 1$
$\Rightarrow \beta > \alpha$

donc K converge si $\quad \alpha < \beta < 1$

Ex2 1/ $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$ $\quad$ soit $f : x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$

on a · $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{\ln x} = 0$ et $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

donc I est faussement généralisée $\Rightarrow$ I converge.

2/ d'après Taylor-Lagrange appliqué à la fonction $f : x \mapsto \ln x$

il existe $c \in]x,1[$ tq $f(x) = f(1) + (x-1)f'(c)$ c-a-d

$\ln x = (x-1)\cdot\frac{1}{c}$ avec $(x-1 < 0)$.

$x < c < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \Rightarrow x-1 > \frac{x-1}{c} > \frac{x-1}{x}$

donc on a $\quad x-1 > \ln x > \frac{x-1}{x}$ (*)

3/ soit $X \in]0,1[$ $\quad$ posons $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$ dans $\int_0^X \frac{x\,dx}{\ln x}$

on obtient $\int_0^X \frac{x\,dx}{\ln x} = \int_0^{X^2} \frac{\frac{dt}{2}}{\ln(t^{\frac{1}{2}})} = \int_0^{X^2} \frac{dt}{\ln t}$ donc $\int_0^X \frac{x\,dx}{\ln x} = \int_0^{X^2} \frac{dx}{\ln x}$

4°) Soit $X \in]0,1[$

$$\int_0^X \frac{x-1}{\ln x}dx = \int_0^X \frac{x}{\ln x}dx - \int_0^X \frac{1}{\ln x}dx = \int_0^{X^2}\frac{dx}{\ln x} - \int_0^X \frac{dx}{\ln x} = \int_X^{X^2}\frac{1}{\ln x}dx.$$

5°) en ~~divisant par~~ passant à l'inverse dans $(x-1<0)$ la double inégalité (*), on obtient

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x-1} \underset{X^2 \leq X}{\Longrightarrow} \int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx \leq \int_X^{X^2}\frac{dx}{\ln x} \leq \int_X^{X^2}\frac{dx}{x-1} \ (**)$$

6°) $\int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx = \int_X^{X^2}\frac{x-1+1}{x-1}dx = \int_X dx + \int_X^{X^2}\frac{1}{1-x}dx = X^2 - X + \ln\frac{X^2-1}{X-1} = X(X-1) + \ln(X+1)$

$\int_X^{X^2}\frac{dx}{x-1} = \left[\ln(x-1)\right]_X^{X^2} = \ln(X+1)$

(**) donne $X(X-1) + \ln(X+1) \leq \int_X^{X^2}\frac{dx}{\ln x} \leq \ln(X+1)$

7°) on fait $X \to 1 \Rightarrow \ln 2 \leq \lim_{X\to 1}\int_X^{X^2}\frac{dx}{\ln x} \leq \ln 2$

$$\Rightarrow \lim_{X\to 1}\int_X^{X^2}\frac{dx}{\ln x} = \ln 2$$

d'après 3) on a donc $\lim_{X\to 1}\int_0^X \frac{x-1}{\ln x}dx = \ln 2$ c-a-d

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx = \ln 2.$$

EX3

1°) $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}$

Soit $I_1 = \int_0^1 f(t)\,dt$; $I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$; f continue positive sur $]0,+\infty[$.

- $f(t) \underset{V(0)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ converge $\Rightarrow I_1$ converge
- $f(t) \underset{V(+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}$ or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{5/2}}$ converge $\Rightarrow I_2$ converge

donc I converge

pour calculer la valeur de I on pose $T=\sqrt{t} \Rightarrow t=T^2 \Rightarrow dt = 2TdT$

d'où $I = \int_0^{+\infty} \frac{2TdT}{T(1+T^4)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dT}{1+T^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

Rq Le calcul de $\int \frac{dT}{1+T^4}$ est pénible et long qui passe par la factorisation de $1+T^4 = (T^2-\sqrt{2}T+1)(T^2+\sqrt{2}T+1)$ et une décomposition en éléments simples).

2) $\alpha > 0$ $\quad J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$ $\quad$ soit $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}$

a) $\quad$ soit $J_\alpha^1 = \int_0^1 f(t)dt$; $J_\alpha^2 = \int_1^{+\infty} f(t)dt$; f est continue positive sur $]0,+\infty[$

- $f(t) \underset{V(0)}{\sim} \frac{t}{t^{\alpha}} = \frac{1}{t^{\alpha-1}} \Rightarrow J_\alpha^1$ converge si $\alpha-1<1 \Rightarrow \alpha<2$

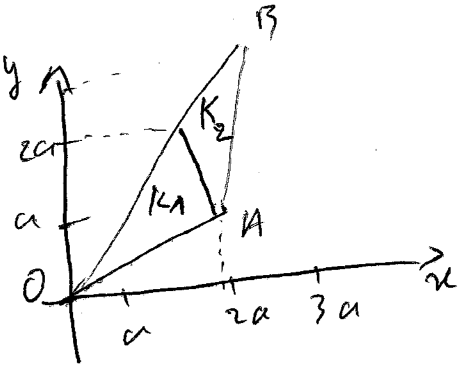
- $f(t) \underset{V(+\infty)}{\sim} \frac{\pi/2}{t^\alpha} \Rightarrow J_\alpha^2$ converge si $\alpha > 1$

donc J_α converge si $\underline{1<\alpha<2}$

b) $J_{3/2} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^{3/2}} dt$ $\quad$ I.P.P $\quad u = \arctan(t) \Rightarrow u' = \frac{1}{1+t^2}$

$v' = t^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow v = \frac{-2}{\sqrt{t}}$

$J_{3/2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \sqrt{2}\pi$



EX4 $\quad K_1 : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2a \\ \frac{x}{2} \leq y \leq x \end{array}$ $\quad K_2 : \begin{array}{l} 2a \leq x \leq 3a \\ 2x-3a \leq y \leq x \end{array}$

$\iint_K \sin(x+y)\,dxdy = \iint_{K_1} \sin(x+y)\,dxdy + \iint_{K_2} \sin(x+y)\,dxdy$

$= \int_0^{2a} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} \sin(x+y)dy \right) dx + \int_{2a}^{3a} \left(\int_{2x-3a}^{x} \sin(x+y)dy \right) dx$

$= \int_0^{2a} \left[-\cos(x+y) \right]_{\frac{x}{2}}^{x} dx + \int_{2a}^{3a} \left[-\cos(x+y) \right]_{2x-3a}^{x} dx$

$= \frac{1}{3}\sin(3a) - \frac{1}{6}\sin(6a).$