EISTI	**Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année** **Devoir surveillé 1** *A. El Janati, K. Guezguez, J.-M. Masereel, E. Masnada*	
	Matière : **Intégration et probabilité**	*Date* : **Lundi 18 février 2019**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
La barème est donné à titre purement indicatif et peut être sujet à variations.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1 (4 points)**.** Étudier la nature des intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t, \quad (a \in \mathbb{R}, b > 0), \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 (6 points)**.** Soit λ un réel, et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, soit $f_\lambda(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$.

1. Suivant le signe de λ, donner un équivalent à f_λ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
3. En faisant le changement de variable, $t = \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale précédente.

Exercice 3 (4,5 points)**.** On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$
(Indication : on pourra utiliser le changement de variables $x = 2t$).
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{t}\,\mathrm{d}t$$
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 4 (5,5 points)**.** Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{\cos^2(x)}{1+x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+x}.$$

On note

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad H = \int_0^{+\infty} (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x, \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

1. Étudier la nature de l'intégrale H.
2. (a) Par une intégration par partie, montrer que

$$K = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

   (b) Déduire la convergence de l'intégrale K.
3. Déduire des résultats précédents la nature des intégrales I et J.
4. Si α est un paramètre réel, on pose

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2(x)}{(1+x)^\alpha}, \qquad x \geqslant 0$$

   Monter que la fonction f_α est intégrable sur $[0,+\infty[$, si et seulement si, $\alpha > 1$