Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année

Devoir surveillé 2

A. El Janati, K. Guezguez, J.-M. Masereel, E. Masnada

Matière : **Intégration et probabilité**	*Date* : **Vendredi 29 mars 2019**
Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
	Nombre de pages : **4**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
La barème est donné à titre purement indicatif et peut être sujet à variations.

⋄⋄⋄

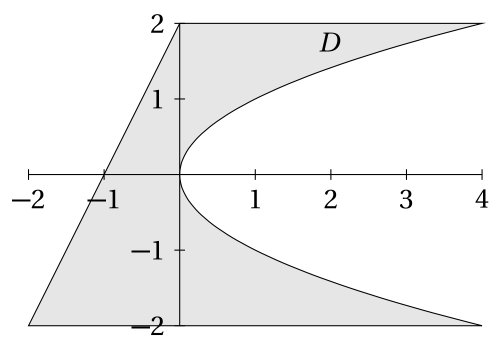
Exercice 1 (3.5 points)**.** Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on considère le domaine D défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leqslant y \leqslant 2;\ \frac{1}{2}y - 1 \leqslant x \leqslant y^2\right\}$$

1. Représenter ce domaine et calculer son aire.
2. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y$. Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

⋄⋄⋄

1. (1 point figure + 1 point calcul)



Intégration par pile :

$$\begin{aligned} A &= \int_{y=-2}^{2} \int_{x=\frac{1}{2}y-1}^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=-2}^{2} \left[y^2 - \frac{1}{2}y + 1\right] \\ &= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{4} + y\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

2. (1.5 point) De même :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{y=-2}^{2} \int_{x=\frac{1}{2}y-1}^{y^2} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=-2}^{2} \left[\frac{1}{2}x^2 + yx\right]_{\frac{1}{2}y-1}^{y^2} \\
&= \int_{y=-2}^{2} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2 - y\left(\frac{1}{2}y-1\right) + \frac{1}{2}(y^2)^2 + y\times y^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=-2}^{2} \left(-\frac{5}{8}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y^4 + y^3\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[-\frac{5}{24}y^3 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{10}y^5 + \frac{1}{4}y^4\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points)**.** Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, qui est par définition la limite de $\int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ lorsque $a \to +\infty$. Ceci n'est pas faisable par des méthodes habituelles car on ne connaît pas d'expression simple d'une primitive de la fonction e^{-t^2}.
On note, pour a un réel positif :

- $I(a) = \int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;
- $C(a) = [0,a]\times[0,a]$;
- $D(a) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant a^2\}$.

On pose enfin $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

1. Montrer que $\iint_{C(a)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (I(a))^2$.
2. Calculer $\iint_{D(a)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en fonction de a.
3. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$

$$\iint_{D(a)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{C(a)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D(a\sqrt{2})} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

4. En utilisant les questions précédentes, déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

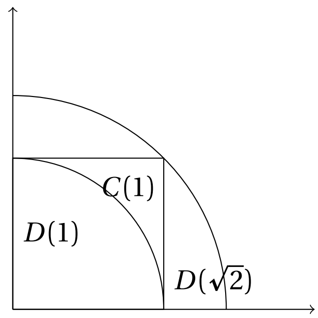
⋄ ⋄ ⋄

1. (1 point)

$$\iint_{C(a)} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^a \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad = \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = (I(a))^2$$

2. (1.5 point) Changement de variables polaires :

$$\iint_{D(a)} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{a} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)$$



3. (1.5 point) f est une fonction positive et $D(a) \subset C(a) \subset D(a\sqrt{2})$.
4. (1 point) En faisant tendre a vers $+\infty$ et d'après la question 2, les deux intégrales extérieurs tendent vers $\frac{\pi}{4}$, donc $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3 (3.5 points)**.** Calculer

$$\iint_D (x^2 - xy + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 \leqslant 4\right\}$.
Indication : Utiliser le changement de variables $x = \sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v$ et $y = \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v$.

◇◇◇

(0.5 Jacobien + 1 domaine + 1 intégrale + 1 chgt var polaire) Le changement de variables proposé est bien un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme (polynomiale, inversible : $u = \frac{x+y}{2\sqrt{2}}$ et $v = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{y-x}{2}$, dont l'inverse est $\mathscr{C}^1$ (polynôme)). Le jacobien est :

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Après calcul, $x^2 - xy + y^2 = 2(u^2 + v^2)$, donc $x^2 - xy + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \leq 2$. Le nouveau domaine est donc le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. En polaire :

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} 2\rho^2 \rho \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 4 (3.5 points)**.** On note B la boule de centre O et de rayon 1.

1. En utilisant la formule de changement de variables, montrer que pour toute fonction positive f définie sur B, on a

$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_B f(y,z,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_B f(z,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

2. En déduire que

$$I = \iiint_B x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_B y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_B z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

3. Calculer l'intégrale

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

4. Déduire la valeur de I.

$\diamond\diamond\diamond$

1. (1 point) On pose $u = y$, $v = z$ et $w = x$. Ce changement de variable est clairement un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme dont le jacobien vaut 1 et l'image de B est tout simplement B ($x^2+y^2+z^2 = u^2+v^2+w^2$). D'où
$$\iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_B f(u,v,w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \iiint_B f(y,z,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
De même pour l'autre changement de variables.
2. (1 point) En prenant $f(x,y,z) = x^2$, on obtient le résultat demandé.
3. (0.5 chgt sphérique + 1 point intégrale) Ainsi, en coordonnées sphériques,
$$3I = \iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1} \rho^2\rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{5}$$
4. Donc $I = \frac{4\pi}{15}$.

Exercice 5 (4.5 points)**.** Calculer $I = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où
$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2, 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\right\}$$
et
$$f(x,y,z) = x+y+z$$

$\diamond\diamond\diamond$

(0.5 x 3 par bornes, 3 x 1 par intégrale)
On intègre par pile, puis on redécompose les piles :

$$I = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x^2+y^2} (x+y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\left[(x+y)z+\frac{1}{2}z^2\right]_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\left(x+y)(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\left(x^3+xy^2+x^2y+y^3+\frac{1}{2}\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{1}\left[x^3y+\frac{1}{3}xy^3+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}\left(x^4y+\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{1}{5}y^5\right)\right]_0^x\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{1}\left(x^4+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}\left(x^5+\frac{2}{3}x^5+\frac{1}{5}x^5\right)\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{1}\left(\frac{25}{12}x^4+\frac{14}{15}x^5\right) = \left[\frac{5}{12}x^5+\frac{7}{45}x^6\right]_0^1 = \frac{5}{12}+\frac{7}{45} = \frac{103}{180}$$