

EISTI – Cycle préparatoire 2^{ème} année
 Intégration & Probabilités – Devoir surveillé n° 2

Romain Dujol

Jeudi 7 mai 2020 – 2 heures

Exercice 1. On utilise le changement de coordonnées cylindriques

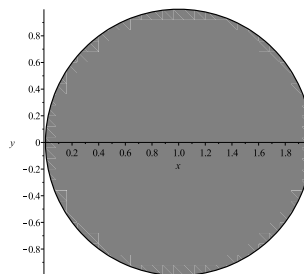
$$\begin{aligned} \Phi: [0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, a] &\rightarrow \Omega \\ (r, \theta, z) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

Alors $\det J_\phi(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$ et :

$$\begin{aligned} \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{[0,a] \times [0,2\pi] \times [0,a]} \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \cdot z \cdot r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \iiint_{[0,a] \times [0,2\pi] \times [0,a]} r^2 z \, dr \, d\theta \, dz = \left(\int_0^a r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^a z \, dz \right) \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \cdot (2\pi) \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^3}{3} \cdot (2\pi) \cdot \frac{a^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{3} a^5} \end{aligned}$$

Exercice 2.

- a. On a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-1)^2 - 1 + y^2 \leq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
 Donc D est le disque de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 :



- b. (i) On utilise le changement de variables polaire $\phi: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow D$.
 $(r, \theta) \mapsto (1 + r \cos \theta, r \sin \theta)$

Alors $\det J_\phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$ et

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} [(1 + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2] r dr d\theta \\ &= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} [1 + 2r \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta] r dr d\theta \\ &= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} [1 + 2r \cos \theta + r^2] r dr d\theta = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} [r + 2r^2 \cos \theta + r^3] dr d\theta \\ &= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} [r + r^3] dr d\theta + \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} [2r^2 \cos \theta] dr d\theta \\ &= \int_0^1 (r + r^3) dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta + 2 \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\ &= \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot (2\pi) + 2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \cdot [\sin \theta]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

(ii) On cherche $P : (x, y) \mapsto P(x, y)$ et $Q : (x, y) \mapsto Q(x, y)$ tels que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2$.

On choisit :

- $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -y^2$, puis $P : (x, y) \mapsto -\frac{y^3}{3}$;
- $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = x^2$, puis $Q : (x, y) \mapsto \frac{x^3}{3}$;

Alors, d'après le théorème de GREEN-RIEMANN,

$$\int_{\bar{\Gamma}} -\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy = \int_{\bar{\Gamma}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

où Γ est la courbe fermée qui délimite le domaine D , c'est-à-dire le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

La fonction $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$ est un paramétrage de Γ dans le sens direct et :

$$t \mapsto (1 + \cos t, \sin t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Gamma}} -\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [-(\sin t)^3(-\sin t) + (1 + \cos t)^3(\cos t)] dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [\sin^4 t + (1 + 3 \cos t + 3 \cos^2 t + \cos^3 t) \cos t] dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [\cos t + 3 \cos^2 t + 3 \cos^3 t + \cos^4 t + \sin^4 t] dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\cos t + 3 \cos^3 t) dt + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 t dt + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt \end{aligned}$$

Calculons les trois intégrales séparément :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos t + 3 \cos^3 t) dt &= \int_0^{2\pi} [\cos t + 3 \cos t(1 - \sin^2 t)] dt = \int_0^{2\pi} (4 \cos t - 3 \cos t \sin^2 t) dt \\ &= [4 \sin t - \sin^3 t]_0^{2\pi} = 0 \\ \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 t dt &= 3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{3}{2} \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 3\pi \end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale, on linéarise d'abord $\cos^4 t + \sin^4 t$:

$$\begin{aligned} \cos^4 t + \sin^4 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} [(e^{it} + e^{-it})^4 + (e^{it} - e^{-it})^4] \\ &= \frac{1}{16} [(e^{-4it} + 4e^{-2it} + 6 + 4e^{2it} + e^{4it}) + (e^{-4it} - 4e^{-2it} + 6 - 4e^{2it} + e^{4it})] \\ &= \frac{4 \cos(4t) + 12}{16} = \frac{1}{4} \cos(4t) + \frac{3}{4} \\ \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(4t)}{4} + \frac{3}{4} \right) dt = \left[\frac{-\sin(4t)}{16} + \frac{3}{4} t \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \\ \text{D'où } \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{\bar{1}} -\frac{y^3}{3} dx + \frac{x^3}{3} dy = \frac{1}{3} \left(3\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'évènement « la machine fonctionne le jour n » : alors $p_n = P(F_n)$.
On sait également que $P_{F_n}(\overline{F_{n+1}}) = p$ et $P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = q$.

En appliquant la formule des probabilités au système complet d'évènements $(F_n, \overline{F_n})$, il vient que

$$p_{n+1} = P(F_{n+1}) = P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n}) = (1-p)p_n + q(1-p_n) = (1-p-q)p_n + q$$

Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

Soit ℓ la solution de l'équation $\ell = (1-p-q)\ell + q$: alors

$$p_{n+1} - \ell = [(1-p-q)p_n + q] - [(1-p-q)\ell + q] = (1-p-q)(p_n - \ell)$$

Donc la suite $(p_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1-p-q$.

La définition de ℓ nous permet de déduire que $\ell = \frac{q}{p+q}$: on en conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}}$$

- b. Comme $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on en déduit que $0 < p+q < 2$, puis que $-1 < 1-p-q < 1$. Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est une suite convergente avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{q}{p+q}$.