



Cycle préparatoire 2^{ème} année

Devoir surveillé 3

A. El Janati, K. Guezguez, J.-M. Masereel, E. Masnada

| | |
|---|------------------------------------|
| <i>Matière : Intégration et probabilité</i> | <i>Date : Vendredi 10 mai 2019</i> |
| <i>Appareils électroniques et documents interdits</i> | <i>Durée : 2 heures</i> |
| | <i>Nombre de pages : 2</i> |

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

La barème est donné à titre purement indicatif et peut être sujet à variations.

◇◇◇

Exercice 1. Les frères Rap-tout se sont introduits dans la demeure de la princesse Dala pour y dérober le célèbre joyau «la panthère rose». Ils se trouvent devant le coffre dont ils ignorent la combinaison de 4 chiffres compris entre 0 et 9.

Attention : tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte.

1. Combien de combinaisons différentes existe-t-il?
2. Cancras, l'ainé, pense que la combinaison commence par un 2. Combien de combinaisons différentes existe-t-il?
3. Carbalas, le cadet des frères, pense que les 4 chiffres sont différents. Combien de combinaisons différentes existe-t-il?
4. Le benjamin de cette bande de filous pense qu'il y a au moins un chiffre pair. Combien de combinaisons différentes existe-t-il?
5. En réalité, le code contient exactement un chiffre pair. Combien de combinaisons différentes existe-t-il?

Exercice 2. Soit $\omega = -\frac{2x(1+e^y)}{(1+x^2)^2} dx - \frac{x^2 e^y}{1+x^2} dy$.

1. Déterminer le domaine de définition D de ω .
2. La forme différentielle ω est-elle fermée sur D ?
3. (a) Est-elle ouverte sur D ?
(b) Si oui, déterminer une primitive f de ω .
4. Déterminer $\int_{\gamma} \omega$ où γ est la courbe paramétrée par $(x(t); y(t))$, t variant de 0 à π , avec $x(t) = 1 + \cos(t)$ et $y(t) = 1 - \sin(t)$.

Exercice 3. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x \leq x^2 + y^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Dessiner D .
2. Montrer que $I = \iint_D (x + y) dx dy = \frac{7}{2} - \frac{\pi}{16}$.
3. En utilisant le théorème de Green-Riemann retrouver la valeur de I .

Exercice 4. Calculer l'intégrale curviligne de deux façons différentes. Γ étant orientée dans le sens positif (trigonométrique).

1. $I = \int_{\Gamma} y dx + x dy$, où Γ est le cercle unité.
2. $I = \int_{\Gamma} xy dx + x^2 y^3 dy$, où Γ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 2)$.

Exercice 5. Soit

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x = 0 \text{ et } y \geq 0\} \\ C_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y = 0 \text{ et } x \geq 0\} \\ \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x \leq 0, x^2 + y^2 - y \geq 0 \text{ et } y \geq 0\} \end{aligned}$$

on note $\partial^+ \Omega$ le bord du domaine Ω orienté dans le sens positif, on définit également la forme différentielle suivante :

$$w = -x^2 y dx + y^2 x dy$$

et on cherche à calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$I = \int_{\partial^+ \Omega} w.$$

1. Dessiner le domaine Ω et orienter son bord.
2. Déterminer les points d'intersections de C_1 et de C_2 .
3. Montrer que l'on peut paramétrer $C_i^i = C_i \cap \partial^+ \Omega$, avec $i = 1$ et 2 par :

$$\begin{aligned} C_1^1 &: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \sin(t) \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ C_2^2 &: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos(t) \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(t) \end{cases} \quad t \text{ allant de } 0 \text{ à } -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Calculer $I = \int_{\partial^+ \Omega} w$
5. Montrer que

$$I = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$$

6. Montrer qu'en coordonnées polaires le domaine Ω s'écrit :

$$\Omega = \left\{ (\rho; \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi[\mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \sin(\theta) \leq \rho \leq \cos(\theta) \right\}$$

7. (a) Montrer que : $\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
(b) Calculer I .