	Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année **Examen final** *R. Dujol, A. El Janati, K. Guezguez, J.-M. Masereel, E. Masnada*	
	Matière : **Intégration et Probabilités**	*Date* : **Mardi 11 juin 2019**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **3 heures**
		Nombre de pages : **3**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous la signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.

⋄ ⋄

Intégration

Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur leur domaine de définition et y calculer leur intégrale.

a. $f_1 : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t(1+t)} \end{array}$

b. $f_2 : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+t)}{t^2} \end{array}$

c. $f_3 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^t}{e^{2t}+1} \end{array}$

Exercice 2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

a. Représenter graphiquement le domaine D.

b. Calculer $\displaystyle\iint_D x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(Tournez la page SVP)

Exercice 3. On considère la courbe Γ dont un paramétrage est $\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & \Gamma \\ & t & \mapsto & \left(\dfrac{t}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right) \end{array}$.

a. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$.

b. Calculer $\displaystyle\int_S x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ où $S = [\gamma(0), \gamma(1)]$ désigne le segment d'extrémités $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.

c. Vérifier que Γ et S ne sont pas identiques.

d. Calculer l'aire du domaine délimité par Γ et S.
(On admet que le bord de ce domaine est exactement donné par l'union de Γ et S et que Γ est en-dessous de S.)

Probabilités

Exercice 4. On dispose de deux dés à six faces :
- le dé « A » a quatre faces rouges et deux faces blanches;
- le dé « B » a deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie déséquilibrée telle que l'on ait une chance sur trois d'obtenir « pile » :
- si on obtient « pile », on choisit le dé A pour le reste du jeu;
- si on obtient « face », on choisit le dé B pour le reste du jeu.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge au premier lancer de dé?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge au troisième lancer sachant que l'on a obtenu une face rouge lors des deux premiers lancers?

c. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que la probabilité d'avoir utilisé le dé A sachant que l'on a obtenu une face rouge lors des n premiers lancers vaut $\dfrac{2^n}{2^n+2}$.
Commenter ce résultat lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5. On rappelle que, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier non nul n, on note P_n l'évènement « on obtient pile au $n^{\text{ème}}$ lancer » et F_n l'évènement « on obtient face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
Pour ne pas surcharger l'écriture, on pourra omettre les signes $\cap$ en notant, par exemple, P_1F_2 au lieu de $P_1 \cap F_2$.

On admet que :

$$\forall x \in]-1,1[, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, \sum_{k=2}^{n} (k-1)x^k = \frac{x^2}{(1-x)^2}\left[1 - n x^{n-1} + (n-1)x^n\right] \qquad (*)$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. On note Z la VAR égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir face pour la première fois.

a. Déterminer la loi de Z.

b. Déterminer son espérance et sa variance <u>en détaillant les calculs</u>.

Partie B. On note X la VAR égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la séquence pile-face pour la première fois : autrement dit, X vaut n si l'on obtient pour la première fois pile au $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer et face au $n^{\text{ème}}$ lancer. **Dans le cas où la séquence pile-face n'est pas obtenue, X prend la valeur 0.**

a. Calculer $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   (i) À l'aide d'une disjonction de cas sur le premier lancer, exprimer $[X=n]$ en fonction des évènements $P_1, \ldots, P_n$ et $F_1, \ldots, F_n$.

   (ii) Montrer que $P(X=n) = \dfrac{n-1}{2^n}$.

c. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)$ et en déduire $P(X=0)$.

d. Calculer l'espérance de X.

e. À l'aide de l'équation $(*)$ en début d'exercice, calculer $P(X \leq n)$ pour tout entier $n \geq 2$.