DS1 Intégrations et probabilités

Exercice 1

1. (a) Si $a \geqslant 0$
La fonction $f : t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$ est définie continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \leqslant f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}}$. En appliquant le critère d'équivalence $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{b-a}}$. D'après le critère de Riemann I_1 est convergente si et seulement si $b - a > 1$.
(b) Si $a < 0$ La fonction $f : t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$ est définie continue sur $]0, +\infty[$. On a un problème en 0 et un problème en $+\infty$.
On a $0 \leqslant f(t) \underset{0}{\sim} t^a$, D'après le critère d'équivalence et de Riemann $\int_0^1 f(t)dt$ est convergente si et seulement si $a > -1$.
Le même raisonnement appliqué dans la cas où $a \geqslant 0$, on montre que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $b - a > 1$.
L'intégrale I_1 est convergente ssi $-1 < a < 0$ (et $b > 0$).
2. La fonction $g : t \mapsto \frac{sin(t)}{t}e^{-t}$ est définie continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0, l'unique problème est en $+\infty$. Or $t^2 g(t)$ tend vers 0 à l'infinie, d'après la règle de $t^\alpha f(t)$, (avec $\alpha > 2$) l'intégrale I_2 est convergente.

Exercice 2

1.

Signe de λ	$\lambda < 0$	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$
Un équivalent en 0 de $f(t)$	$\frac{1}{x^\lambda}$	$\frac{1}{2}$	1
Un équivalent en $+\infty$ de $f(t)$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2x^2}$	$\frac{1}{x^{2+\lambda}}$

2. D'après la première question et le critère de Riemann, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, les intégrales $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont convergentes.
3.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} f(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x^\lambda})} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}dx \end{aligned}$$

A l'aide des deux expressions de I on a

$$I + I = 2I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale I est alors égale à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 :

1. La fonction $h : t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ est définie continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (car le DL en 0 à l'ordre 1 est $h(t) = 1 + o(1)$). Alors $\int_0^1 h(t)dt$ est convergente et l'unique problème est au voisinage de $+\infty$. D'après la règle de $t^\alpha f(t)$ l'intégrale $\int_1^{+\infty}$ est convergente car $t^2 h(t)$ converge vers 0.

2. Soit $\varepsilon > 0$.
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt &= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx \\ &= \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t}dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx \\ &= \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt\end{aligned}$$
3. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, on a $e^{-2\varepsilon} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-\varepsilon}$. En multipliant par $\frac{1}{t}$ et en intégrant, on obtient l'encadrement demandé.
4. D'après les deux questions précédentes, on a
$$e^{-2\varepsilon}\left[\ln(t)\right]_\varepsilon^{2\varepsilon} \leqslant \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt \leqslant e^{-\varepsilon}\left[\ln(t)\right]_\varepsilon^{2\varepsilon} \Leftrightarrow e^{-2\varepsilon}\ln(2) \leqslant \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt \leqslant e^{-\varepsilon}\ln(2)$$
En faisant tendre ε vers 0 et en appliquant le théorème d'encadrement, on déduit que $I = \ln(2)$.

Exercice 4 :

1. La fonction $x \mapsto f(x) + g(x) = \frac{1}{1+x}$ est définie, continue sur $[0 + +\infty[$. D'après le critère de Riemann $\int_1 +\infty \frac{1}{x}dx$ diverge, ce qui prouve la divergence de H.
   (a) Soit $X \in]0, +\infty[$
$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{1+X}dx &= \int_0^X \frac{\cos(2x)}{1+X}dx \\ &= \left[\frac{\sin(2x)}{2(1+x)}\right]_0^X + \frac{1}{2}\int_0^X \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2}dx \\ &= \frac{\sin(2X)}{2(1+X)} + \frac{1}{2}\int_0^X \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2}dx.\end{aligned}$$
   Pour obtenir le résultat il suffit de tendre X vers $+\infty$.
   (b) La fonction $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2}$ est définie, continue sur $[0, +\infty[$. On a alors K est convergente ssi $\int_1^{+\infty} \int_0^X \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2}dx$ est convergente. Or pour tout $x \in [1, +\infty[$
$$\mid \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2} \mid \leqslant \frac{1}{x^2}.$$
   A l'aide du théorème de majoration et de critère de Riemann, on déduit la convergence absolue de $\int_0^X \frac{\sin(2x)}{(1+x)^2}dx$ d'ou la convergence de l'intégrale K.
2. Les intégrales I et J sont divergentes car $I = \frac{1}{2}(H+K)$, $J = \frac{1}{2}(H-K)$ et on sait que la somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente est divergente.
3. La fonction f_a est définie continue sur $[0, +\infty[$, en particulier intégrable sur $[0, 1]$.
   (a) Pour $a > 0$. On a
$$\int_1^{+\infty} f_a(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)^a} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2(1+x)^a}dx$$

D'après le critère de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}$ converge, si et seulment si, $a > 1$.
D'après le théorème d'Abel $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2(1+x)^a} dx$ est convergente car, pour tout $b > 1$, on a $\mid \int_1^b \cos(2x)dx \mid \leqslant 2$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{2(1+x)^a}$ est décroissante positive et tend vers 0 en $+\infty$.
Puisque la somme deux intégrales convergentes est convergentes et la somme d'une intégrale convergente et d'une divergente est divergente, on a $\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$ est convergnete, si et seulment si, $a > 1$.

(b) Pour $a < 0$. La fonction $f_a(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

(c) Pour $a = 0$. La fonction $f_0(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.