

TD 6-7: Lois usuelles

---

**Exercice 1.** Un étudiant passant un oral de mathématique choisit dans une urne 5 enveloppes contenant chacune une question à traiter. Il y a dans l'urne, au totale, 12 questions de probabilités et 8 questions d'analyse. On appelle  $X$  le nombre de questions de probabilités qu'il a tirée.

- a) Donner la loi de  $X$ ,  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$
- b) Reprendre le problème dans le cas où il y a dans l'urne 60 questions de probabilité et 40 questions d'analyse.

**Exercice 2.** On tire avec remise une carte d'un jeu de 52 cartes, et on note  $Y$  la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués lorsque l'on obtient, pour la 4<sup>e</sup> fois, un roi.

Donner la loi de  $Y$ , sa fonction génératrice et en déduire  $\mathbb{E}(Y)$  et  $V(Y)$ .

Utiliser les deux formules suivantes:

$$\forall q \in [0, 1], \quad \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=r-1}^{\infty} C_k^{r-1} q^{k-r+1} = \frac{1}{(1-q)^r} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

**Exercice 3.** Soit  $X_n$  des variables aléatoires i.i.d (indépendantes identiquement distribuées) suivant une loi de Bernoulli de paramètres  $p$ . On pose

$$Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad U_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

- 1) Quelle est la loi de  $Y_n$  ?
- 2) Les  $Y_n$  sont-elles deux à deux indépendantes ?
- 3) Calculer l'espérance et la variance de  $U_n$ .

**Exercice 4.** I) Soit  $X$  une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètres  $\theta > 0$  et  $\nu \in \mathbb{R}$ . Déterminer :

- a) La fonction génératrice
- b) La moyenne  $\mu$
- c) La variance  $\sigma^2$

II)

Un sous-marin nucléaire voyage en plongée mais doit néanmoins faire surface pour renouveler son atmosphère. La durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle. En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 88% des plongées ont duré plus de six jours.

- a) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  représentant le temps de plongée du sous-marin.
- b) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dure plus d'une semaine.
- c) Sachant que le sous-marin évolue immergé depuis une semaine, calculer la probabilité pour que la plongée dépasse dix jours.

**Exercice 5.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On pose  $Y = \min(X_1, X_2)$ .

1. Pour tout réel  $y$ , calculer  $\mathbb{P}(Y > y)$ . En déduire que  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_2$ .
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier?
3. En moyenne, après combien de temps sort le dernier?

**Exercice 6.** On considère une v.a.  $X$  de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:  $\mathbb{E}(X^{n+1}) = (n + 1)\mathbb{E}(X^n)$
- 2) Que vaut  $\mathbb{E}(X^2)$ ? Déduire de ce résultat de la question précédente la valeur  $\mathbb{E}(X^4)$
- 2) Que vaut  $\mathbb{E}(X^3)$ ?

**Exercice 7.** Dans une école d'ingénieurs, on suppose que le résultat (sur 100) à un examen d'analyse est aléatoire suivant une loi normale  $\mathcal{N}(70, 14^2)$ . On désire diviser en quatre classes ( $A, B, C, D$ ) les résultats des étudiants qui se présentent au prochain examen en supposant que les nombres réels positifs  $C_1, C_2, C_3$ :

- $A =$  "Élevés ayant un résultat supérieur ou égal à  $C_1$ "
- $B =$  "Élevés ayant un résultat inférieur à  $C_1$  mais supérieur ou égal à  $C_2$ "
- $C =$  "Élevés ayant un résultat inférieur à  $C_2$  mais supérieur ou égal à  $C_3$ "
- $D =$  "Élevés ayant un résultat inférieur à  $C_3$ "

Déterminer les constantes  $C_1, C_2, C_3$  telles que les classes  $A, B, C$  et  $D$  contiennent respectivement 10%, 30%, 45% et 15% des étudiants.

**Exercice 8.** Une machine fabrique des vis ayant comme diamètre une variable aléatoire normale d'espérance 10mm et d'écart-type 1 mm. Une autre machine fabrique des écrous ayant comme diamètre une variable aléatoire normale d'espérance 11 mm et d'écart-type 0,5 mm. En choisissant au hasard une vis et un écrou, quelle est la probabilité pour que la vis rentre dans l'écrou ?

**Exercice 9.** Dans le cadre d'une enquête hospitalière on suppose connaître pour chaque sujet la cause de son décès :

- 1) décès lié au cancer des bronches,
- 2) décès lié à toute cause (accident, autre maladie, etc, ...)

Pour les sujets de la première catégorie, on admet que la distribution du délai de survie  $X$  (exprimé en mois) suit une loi Lognormale d'espérance  $\mu_X$  et de variance  $\sigma_X^2$ , c'est à dire que l'on peut trouver des constantes  $a, x_0, b$ , telles que la variable :

$$Y = a \ln(X - x_0) + b$$

suivre une loi normale d'espérance  $\mu_Y$  et de variance  $\sigma_Y^2$ .

- a) Calculer  $\mu_X$  en fonction de  $a, x_0, b, \mu_Y$  et  $\sigma_Y$
- b) Pour étudier la moyenne des délais de survie sur un groupe de  $n$  sujets, revient-il au même de considérer les moyennes empiriques  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  ?
- c) On admet maintenant que la transformation  $Y = \ln X$  est telle que  $Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(1.8 ; 1)$ .

Avant la fin de l'enquête on désire étudier le délai moyen de survie observé sur les 16 premiers sujets, tous décédés.

Quelle est la probabilité pour que  $\bar{Y} > 2.8$  ?

**Exercice 10. (Loi gamma et khi-deux).**

1.a) Montrez que pour tout  $a > 0, b > 0$ , la fonction

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}. \quad (1)$$

est une densité de probabilité.

Pour une v.a. réelle  $X$ , on notera  $X \hookrightarrow \gamma(a, b)$  lors que  $f_X$  est définie par (1).

Pour la suite on suppose que  $X \hookrightarrow \gamma(a, b)$ .

1.b) Déterminer la fonction génératrice des moments  $M_X$  de  $X$  et en déduire que :

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \sigma_X^2 = \frac{a}{b^2}.$$

2.a) Soient  $X_1 \hookrightarrow \gamma(a_1, b)$  et  $X_2 \hookrightarrow \gamma(a_2, b)$ . Montrez que  $X_1 + X_2$  suit une loi  $\gamma(a_1 + a_2, b)$ .

3.a) Soit  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Montrez que

$$Y^2 \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

En déduire la valeur de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ .

3.b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$  i.i.d t.q.  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Montrez que

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

C'est-à-dire une loi de  $\chi^2$  (prononcer khi carré, voire khi-deux) à  $n$  degrés de liberté.

### Transformée d'une v.a.

**Exercice 11.** Déterminer les caractéristiques de la variable aléatoire :  $Y = \varphi(X)$  où

$$X \sim \mathcal{U}([0, 1]) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = e^x.$$

Il faut préciser : le support, la densité de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de  $Y$ .

**Exercice 12.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, de densité  $f$ .

- 1) Déterminer la densité  $g$  de l.a.  $Y = e^X$
- 2) Donner la forme de  $f_Y$  lorsque  $\mathcal{L}(Y) \equiv \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  ( $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ )

**Exercice 13.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, de densité  $f$ .

- 1) Déterminer la densité  $g$  de l.a.  $Y = \frac{1}{X}$
- 2) Donner la forme de  $f_Y$  lorsque  $\mathcal{L}(Y) \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 14.** Soit  $X$  une v.a. réelle, absolument continue, de densité  $f$ .

- 1) Déterminer la densité  $g$  de  $Y = |X|$ .
- 2) Donner la forme  $g$  lorsque  $X$  est paire, en particulier si  $\mathcal{L}(X) \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 15.** Soit  $X$  une v.a. réelle, absolument continue, de densité  $f$ .

1) Déterminer la densité  $g$  de  $Y = X^2$ .

2) Donner la forme  $g$  lorsque  $X$  est paire, en particulier si  $\mathcal{L}(X) \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ .

*Pour les exercices suivantes utiliser le résultat suivant pour déterminer la densité de la v.a.  $Y = \varphi(X)$ .*

*Théorème. Une probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  admet la densité  $f$  si cette fonction est borélienne positive sur  $\mathbb{R}$  et vérifié*

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx = \int f(x)\mathbf{1}_A(x)dx \quad \forall \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

**Exercice 16.** Étant donnée une variable aléatoire  $X$  de loi uniforme sur  $]0, 1[$ , donner la loi de la variable  $Y = \lambda X + \mu$  pour  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

**Exercice 17.** Étant donnée une variable aléatoire  $X$  de loi gaussienne centrée réduite, i.e. de loi de densité

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}}$$

donner la loi de  $Y = m + \sigma X$ , pour  $m$  réel et  $\sigma$  réel strictement positif.