

Probabilités : Lois de Probabilités usuelles

Naâmane LAIB

10 décembre 2017

Introduction

Nous présentons ici quelques lois des variables aléatoires usuelles. Certaines, comme la loi normale, sont extrêmement importantes tant sur le plan théorique que pratique (utilisation très fréquente en statistique).

Loi uniforme

$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, une v.a X est distribuée selon la loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Modèle.- Choisir au hasard un objet parmi n objets numérotés de 1 à n . $\Rightarrow X$ détermine le numéro de l'objet choisi.

-Espérance et variance

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n+1}{2}.$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Loi de Bernoulli

Expérience de Bernoulli a deux issues possibles :

s=succès et **e**=échec. $\Omega = \{s, e\}$.

$$\mathbb{P}(\{s\}) = p \quad \mathbb{P}(\{e\}) = 1 - p \quad \text{avec } 0 \leq p \leq 1.$$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{avec } X(s) = 1 \quad \text{et } X(e) = 0$$

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Support : $D_X = X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Fonction de masse

$$p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \forall x \in D_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p)$$

Modèle.-

- Série de lancer à pile ou face : X vaut 1 si pile apparaît au 1^{er} lancer et 0 sinon.
- Prélèvement à partir d'un lot, d'un article pouvant être soit bon soit défectueux.

1) Si $X \hookrightarrow B(1, p)$ sa loi peut être écrit :

$$\mathbb{P}_X = q\delta_0 + p\delta_1.$$

2) Si A est un événement, alors $\mathbf{1}_A$ est une v.a. de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.

$$\mathbf{1}_A \hookrightarrow B(1, (\mathbb{P}(A))).$$

Loi Binomiale

Modèle.

Effectuer n tirages avec remise dans une urne contenant deux catégories de boules :

- des **blanches** en proportions p ($0 \leq p \leq 1$)
- des **noires** en proportions q ($p + q = 1$).
- $X \equiv$ **nombre de boules blanches**.
- Par **définition** : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
- **Support** $D_X = \{0, 1, \dots, n\}$.

Loi de X

- $A_i \equiv$ "la i -ème boule tirée est blanche".
 - $\{X = k\} \equiv$ **nombre de boules blanches obtenu** = $k \Leftrightarrow$
 k des boules tirées sont blanches et $n - k$ sont noires.
- Si l'ordre de réalisation est établi, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(\bar{A}_{k+1}) \dots \mathbb{P}(\bar{A}_n) = p^k q^{n-k}.$$

Mais l'ordre n'était pas imposé, il y a donc C_n^k façons de choisir les rangs de tirage des boules blanches.

$$P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & \forall x \in D_X \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Fonctions génératrice et caractéristique

Fonctions génératrice et caractéristique

$$G_X(u) = (q + pu)^n \quad \text{et} \quad \varphi_X(u) = [1 + p(e^{iu} - 1)]^n$$

Moments Factoriels

$$\mu_{[k]} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} p^k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

$n \rightarrow +\infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow m$ fini. Alors :

$$C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \rightarrow \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

Ce résultat permet de

$$\mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{P}(np) \quad n \text{ est grand } p \text{ petit}$$

On utilise l'approximation dans les conditions suivantes :

$$n > 50, \quad p < 0,1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{P}(np),$$

$$n > 50, \quad p > 0,9 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}(n, p) \simeq n - \mathcal{P}(nq).$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi Normale

Si $n \rightarrow +\infty$; p reste fixe. Alors

$$C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(x-np)^2/2npq}$$

Ce résultat établi par De Moivre permet d'approximer :

$$\mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{N}(np, npq) : n \text{ est grand et } p \text{ ni trop petit ni trop grand}$$

- En pratique on utilise cette approximation lorsque

$$np > 15 \quad \text{et} \quad nq > 20$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi Normale : règle de continuité

La règle de continuité, qui consiste à tenir compte de $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(x_1 \leq \mathcal{B}(n, p) \leq x_2) \sim \Phi\left(\frac{x_2 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$, améliore la qualité des approximations.

Lorsque $x_1 = x_2 = x$

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(n, p) = x) \sim \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Loi hypergéométrique-Loi du tirage sans remise-

Même situation type que la loi Binomial mais le tirage est sans **remise**.

Modèle.- Tirage simultané (ou successif) **sans remise** de n boules dans une boîte contenant deux catégories de boules :

$$\text{avec } \begin{cases} N_1 & \text{boules Blanches} \\ N_2 & \text{boules Noires} \\ N_1 + N_2 = N & \text{nombre total et } n \leq N. \end{cases}$$

Definition

La v.a. X qui compte le nombre de boules blanches parmi les n choisies suit une loi géométrique de paramètres N , n et $p := \frac{N_1}{N}$ ($q = \frac{N_2}{N}$). On note

$$X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$$

Loi de X :

-**Support de X** : $X(\Omega)$. Soit $x \in X(\Omega)$, alors x doit vérifier

$$0 \leq x \leq N_1 \quad \text{et} \quad 0 \leq n - x \leq N_2$$

d'où

$$D_X = \{x_{\min}, \dots, x_{\max}\} = \{\max(0, n - N_2), \dots, \min(n, N_1)\}.$$

Loi de X :

- **Fonction de masse.** $p_X(x) = \mathbb{P}(X = k)$

- Un résultat favorable consiste à choisir k boules blanches parmi $N_1 = Np$ cela peut se faire de $C_{N_1}^k$ façons.

- puis dans chacun des cas il existe $C_{N_2}^{n-k}$ façons de choisir $(n - k)$ boules noires pour compléter le tirage.

- Le nombre de cas favorable est ainsi $C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}$, d'où :

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n} \quad \forall k \in D_X$$

avec

$$0 \leq N_1 \leq N; \quad 1 \leq n \leq N.$$

Propriétés

$$\mathbb{E}(X) = n \frac{N_1}{N} = np \Rightarrow \mathbb{E}(\mathcal{H}(N, n, p)) = \mathbb{E}(\mathcal{B}(n, p)) :$$

Le type de tirage ne modifie donc pas le nombre moyen de succès.

$$\mathbb{V}(X) = npq \frac{N-n}{N-1} \Rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{H}(N, n, p)) \leq \mathbb{V}(\mathcal{B}(n, p))$$

- La v.a. $(n - X) \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, q)$,
car si on obtient k boules blanches, on obtient par la même occasion $(n - k)$ boules noires qui sont en proportion q .

Approximation d'une $\mathcal{H}(N, n, p)$

- par une **une loi binomial**

- $N_1 \rightarrow \infty$, $N_2 \rightarrow \infty$, $p = \frac{N_1}{N}$, $q = \frac{N_2}{N}$ et n restant fixes. Alors :

$$\frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k} \Rightarrow \mathcal{H}(N, n, p) \sim \mathcal{B}(n, p)$$

En pratique, l'approximation peut se faire lorsque $\frac{n}{N} < 0,1$.

- par une **loi de Poisson**

Si $N \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow 0$ de telle sorte que :

$$\frac{n}{N} \rightarrow 0, \quad np \rightarrow m$$

$$\frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow \frac{e^{-m} m^k}{k!} \Rightarrow \mathcal{H}(N, n, p) \sim \mathcal{P}(np)$$

Exemple

Exemple

A une épreuve d'examen il doit être proposé aux candidats 3 sujets au choix. Le programme comporte 150 sujets possibles. Quelle est la probabilité qu'un candidat n'ayant étudié que 30 de ces sujets connaisse l'un au moins des sujets proposés ?

Solution. Soit A : "Connaître 1, ou 2, ou 3 sujets" \bar{A} ="connaître 0 sujet".

Avec le schéma d'urne :

- $N = 150$ boules comprenant 30 noires (sujets connus)
- 120 blanches (sujets non connus).

Ici $N = 150$ $n = 3$, $Np = 120$ et $Nq = 30$. Tirer 3 blanches (donc 0 noire) est

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{C_{120}^3 C_{30}^0}{C_{150}^3} \simeq 0,51.$$

Loi géométrique

Modèle : Effectuer des tirages **avec remise** dans une urne contenant deux catégories de boules :

- des blanches en proportion p ($0 < p < 1$)
- des noires en proportion q .
- $X \equiv$ nombre de tirages nécessaire pour obtenir **1^{ère} boule blanche**.

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i \geq 1} X_i, & X_i &\text{ sont des v.a. } i.i.d \text{ de loi de Bernoulli } \mathcal{B}(1) \\ &= \inf\{i \geq 1 : X_i = 1\} \\ &\hookrightarrow \mathcal{G}(p). \end{aligned}$$

Loi de X

-Support : $D_X = \mathbb{N}^*$.

-Fonction de masse :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0) \times \mathbb{P}(X_k = 1) \\ &= \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien une loi de probabilité puisque :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Propriétés

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple.- Une urne contient des jetons numérotés de 1 à m . On tire successivement les jetons un à un avec remise, jusqu'à obtenir le numéro m .

Soit X , le nombre de tirage effectués.

La probabilité d'obtenir m , à chaque tirage est $\frac{1}{m}$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{m}\right)$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Nombre d'échecs avant le premier succès

Remarque.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors la v.a. $Y = X - 1$ représente le nombre d'échecs avant le premier succès. On a :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k + 1) = pq^k$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - 1 = \frac{q}{p}$$

$$V(Y) = V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Temps d'attente : Loi de Pascal

Modèle : On effectue des tirages successifs **avec remise** dans une urne jusqu'à obtenir r **boules blanches**.

L'urne est composée de deux catégories de boules :

- des **blanches en proportion p** ($0 < p \leq 1$)
 - et des **noires en proportion q** .
- T_r la v.a. désignant le rang de l'apparition de la $r^{\text{ème}}$ b. B, $\Leftrightarrow T_r$ est le **temps d'attente de la $r^{\text{ème}}$ b.B.**
 - Ce modèle servira lorsqu'on s'intéressera au temps d'attente du $r^{\text{ème}}$ succès dans une succession d'épreuves indépendantes à deux issues, succès avec probabilité p et échec avec probabilité q .

$$T_r = \sum_{i=1}^r X_i, \quad \text{où } X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

Loi de Pascal : définition

Definition

La v.a. T_r qui compte le nombre de répétition nécessaires pour avoir r succès (ou le temps d'attente d'avoir r premier succès) suit une loi de Pascal de paramètres r et p . On note

$$T_r \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p).$$

Loi de T_r

- **Support** :

$$D_{T_r} = \{r, r + 1, \dots, \infty\}, \quad \text{car le :}$$

- $r^{\text{ème}}$ succès ne peut arriver avant le $r^{\text{ème}}$ essai.

- **Fonction de masse.** $(T_r = k) = A \cap B$ où

B : la k -ième boule tirée est blanche.

A : parmi les $(k - 1)$ premières boules tirées figurent $(r - 1)$ boules blanches.

A et B sont indépendants et

$$\mathbb{P}(B) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B(k - 1, p) = r - 1) = C_{r-1}^{k-1} p^{r-1} q^{(k-1)-(r-1)}$$

$r - 1$ succès en $k - 1$ essais indépendants de même probabilité p . D'où

$$\forall k \geq r \quad \mathbb{P}(X_r = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq k \leq r - 1 \\ C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-1} & \text{si } k \geq r \end{cases}$$

Propriétés

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_r = k) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{r+k-1}^{r-1} p^r q^k = p^r (1-q)^{-r} = 1$$

$$\mathbb{E}(T_r) = \frac{r}{p} \quad \mathbb{V}(T_r) = \frac{rq}{p^2}$$

$$G_X(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^r \quad |qt| < 1$$

Exemple

Exemple

Lors d'un test d'accès à un ordinateur central par réseau télématique, on a constaté que 95% des essais permettaient une connection correcte. Une entreprise doit se connecter 4 fois dans la journée pour la mise à jour de ses fichiers. Soit X le nombre d'essais nécessaire pour se connecter 4 fois :

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(4; 0.95)$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = C_{4-1}^{4-1} (0.95)^4 (0.05)^0 = (0.95)^4 = 0.815$$

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{4}{0.95} = 4.21$$

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{rq}}{p} = 0.471$$

Loi de Poisson de paramètre $\lambda : \mathcal{P}(\lambda)$

- $\mathcal{P}(\lambda)$: utilisée pour modéliser le nombre d'occurrences d'un événement sur une unité d'espace ou de temps
- Le paramètre

$$\lambda = \mu\tau \quad \text{où}$$

- μ : est l'intensité
- τ : une grandeur physique qui peut être une
 - longueur,
 - une surface,
 - un volume,
 - un intervalle de temps, etc
- Dans le cas d'une mesure dans le temps, on aura
 - $\lambda = \mu t$, où t est la longueur de l'intervalle de temps sur lequel le nombre d'occurrences X est compté et μ est une intensité dont les unités sont l'inverse des unités du temps t .

Il s'applique aussi à de nombreux cas : en particulier à tous les cas où il y a "événement rare".

Loi de Poisson : Application

- Sur un intervalle de temps :
 - le nombre d'accidents de circulation mortels par jour dans un pays,
 - le nombres d'appels reçus par un petit standard téléphonique en une minute,
 - le nombre de clients arrivant à un guichet de banque entre 12 : 00 et 12 : 10;
 - Nombre de véhicules franchissant un poste de péage pendant une courte période
- Sur une unité de longueur : le nombre de défauts le long d'un câble en acier ;
- Sur une unité de surface : le nombre de bombes égarées sur un pâté de maison au terme d'une guerre ;
- Sur une unité de volume : le nombre de bactéries pathogènes en suspension dans un échantillon d'eau de distribution ;

Loi de Poisson

Definition

Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

(i) $D_X = \mathbb{N}$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda). \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$

Exemple

On a pu estimer que, durant la seconde guerre mondiale, le nombre X de V1 tombés sur un quartier de Londres suit une loi de Poisson avec une intensité $\mu = 3.7 \times 10^{-6}$ /mètre carré. On demande de calculer la probabilité qu'un pâté de maison de 100 mètres de côté ait été épargné par les V1, ainsi que la probabilité d'observer x impacts, $x \in \mathbb{N}$ sur un carré de 500 mètres de côté.

X est le nombre de V1 tombés sur une surface S de $100 \times 100 = 10\,000 \text{ m}^2$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = \mu S = 3.7 \times 10^{-6} \times 10^4 = 0.037$, on calcule

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} = 0.96$$

Exemple (suite)

Pour une surface de $500 \times 500 = 250\,000\text{m}^2$, on
 $\lambda = \mu \times S = 3.7 \times 10^{-6} \times 250\,000 = 0.925$

x	0	1	2	3	4	...
$p(x)$	0.40	0.37	0.17	0.05	0.01	...

La probabilité de ne pas observer d'impacts est bien entendu plus faible lorsque la surface augmente ; elle vaut 0.40 pour $S = 250\,000\text{m}^2$.

Approximation de Loi binomiale par Loi de Poisson

Théorème

Théorème de Poisson. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réels $(p_n \in]0, 1[)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ ($\lambda > 0$). Considérons, pour chaque entier n , une v.a. S_n de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. On a donc

$$\mathbb{P}(S_n = k) = P_n(k) = \begin{cases} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite de terme général $\mathbb{P}(S_n = k)$ est convergente et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration

On a, $p_n = \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$ $n \rightarrow \infty$, donc, $\forall k \in \mathbb{N}$ fixé, et $\forall n \geq k$:

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^k \left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{n-k} \\ &= I_{n,1} + I_{n,2}. \end{aligned}$$

Or, pour n assez grand

$$I_{n,1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} [\lambda + o(1)]^k \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}, \quad n \rightarrow \infty$$

D'autre part, on sait que $\left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda}$, $n \rightarrow \infty$. Ce qui démontre le résultat.

Remarque pratique

Le théorème de Poisson donne une **approximation de la loi binomiale** lorsque le paramètre p est "**petit**".

En pratique, is

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ avec :

- n de l'ordre de 30
- p est de l'ordre de 0.1
- $\mathbb{E}(X) = np = \lambda$ pas trop grand. Alors

$$\mathcal{L}(X) \equiv \mathcal{P}(\lambda).$$

Principales loi de v.a. continues

Nous étudions ici quelques exemples de lois classiques de probabilités définies sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par une densité f .

Loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$)

Une v.a. continue $U \hookrightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$, si U admet une densité f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \frac{\mathbf{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La probabilité que U appartienne à $[a, b]$ est proportionnelle à la longueur de cet intervalle.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Fonction de Répartition

$$F_U(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Propriétés :

Fonction génératrice des moments

$$M(u) = \mathbb{E} \left(e^{uU} \right) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \frac{e^{bu} - e^{au}}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

Fonction Caractéristique

$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{ita} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Égalité en loi.

$$\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(1 - U).$$

Exemple

Exemple

Dans une station de métro, les rames arrivent à une cadence de une toutes les 5 minutes. Un passager se présente à la station à un instant qui n'est lié d'aucune façon à l'horaire des rames. Quelle est la probabilité que le passager attende la rame plus de 2 minutes ?

Le temps d'attente X donné en minutes suit une loi uniforme, avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 5])$. D'où

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - F(2) = \frac{3}{5} \quad (\text{Fig})$$

Loi Exponentielle

Definition

Une v.a. continue $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\theta, \nu)$, ($\theta > 0, \nu \in \mathbb{R}$), si X est absolument continue et admet pour densité

$$f(x) = \mathbf{1}_{[\nu, +\infty[}(x) \theta e^{-\theta(x-\nu)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lorsque : $\nu = 0$, la v.a. X représente :

- La **durée de vie** d'un : appareil, ampoule, atome radioactif, ...
- **Temps d'attente** avant une première apparition d'un phénomène aléatoire.
- Le **temps entre deux apparition d'un phénomène aléatoire**

Fonction de répartition et fonction de survie (ou fonction de fiabilité du système)

▷ **Fonction de répartition.**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x > \nu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▷ **Fonction de survie (ou fonction de fiabilité du système).**

Quand $\nu = 0$, il est préférable de travailler avec la fonction *de survie* (ou fonction *de fiabilité du système*) définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\phi(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = \begin{cases} e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\phi(t)$ peut alors être interprétée comme :

la probabilité pour qu'un appareil ait encore été en fonctionnement à l'instant t (fonction de survie).

Exemple

Exemple

Soit T le temps de fonctionnement d' un ampoule avant la première panne.

- 1) Quelle est la loi de T
- 2) Quelle est la fiabilité de cette ampoule à l'instant $500h$ si sa durée moyenne est de $600h$.

$$1) \quad T \hookrightarrow \mathcal{E}(\theta, 0), \quad \mathbb{E}T = \frac{1}{\theta}$$

- 2) La fonction de fiabilité de l'ampoule à l'instant t_0 est

$$\phi(t_0) = \mathbb{P}T > t_0 = e^{-\theta t_0}$$

- La durée moyenne

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{\theta} = 600h$$

- La fiabilité de cette ampoule à l'instant $t_0 = 500h$ est $e^{-5/6}$
- L'ampoule dure au moins $500h$ avec une probabilité de $e^{-5/6} = 0.4345982$

Fonction génératrice des moments

$$M(u) = \mathbb{E} \left(e^{uX} \right) = \frac{\theta}{\theta - u} = \frac{1}{1 - \frac{u}{\theta}} \quad (u \in] - \infty, \theta[).$$

•Espérance et variance.

$$\mathbb{E}(X) = \nu + \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Démonstration

$$M(u) = \theta \int_0^{\infty} e^{-x(\theta-u)} dx < \infty \Leftrightarrow \theta - u > 0.$$

Changement de variable $x(\theta - u) = t \Rightarrow$:

$$M(u) = \theta \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{\theta - u} dt = \frac{\theta}{\theta - u} = \frac{1}{1 - (u/\theta)}$$

définie $] -\infty, \theta[$, ($\theta > 0$), voisinage ouvert de 0; $M(u)$ est donc la fonction génératrice des moments de X . Elle est développable en série entière $\forall u \in] -\theta, \theta[\Rightarrow \forall k \geq 1, \mathbb{E}(X^k) < \infty$.

Démonstration (suite)

$\mathbb{E}(X^n)$ est le coefficient de $\frac{u^n}{n!}$ dans le développement de M autour de 0. Or

$$M(u) = \frac{1}{1 - \frac{u}{\theta}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{u}{\theta}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{\theta^n} \frac{u^n}{n!} \quad (u \in]-\theta, \theta[);$$

d'où les valeurs des moments :

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\theta^n} \quad (n \geq 0)$$

Proposition : Lien entre loi de Poisson et loi Exponentielle

Proposition

Si le **nombre Y d'occurrences** d'un événement sur un intervalle de temps $[0, x]$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda = \theta x)$, alors le **temps X séparant deux événements consécutifs** suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$.

Preuve. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda = \theta x)$
et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\theta)$ est le temps auquel survient une première occurrence après l'instant 0, alors

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X > x) \Rightarrow e^{-\theta x} = 1 - F_X(x) \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\theta x}$$

qui est bien la fonction de répartition de la loi exponentielle. \square

- La loi exponentielle est donc associée à la loi de Poisson dans tel cas.
- Elle intervient couramment dans des problèmes de fiabilité (temps, séparant deux temps consécutifs, durée de vie de composantes, etc.)

Exemple

Exemple

On estime que le nombre Y d'alertes au feu signalées par jour à une caserne de pompiers suit une loi de Poisson de paramètres $\lambda = \theta t = 3.2$. Quelle est la probabilité

(1) qu'il y ait plus d'une alerte sur la journée ?

(2) Que deux alertes se suivent à moins de deux heures d'intervalle ?

(1) On a $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(3.2)$ et l'on a

$$\mathbb{P}(Y > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - 0.041 - 0.130 = 0.829$$

(2) Si le nombre d'alertes Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta t)$,

- le temps X séparant deux alertes suit une loi exponentielle $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\theta)$.

- Avec $\lambda = 3.2$ et $t = 1$, on a :

- $\theta = 3.2 \text{ jours}^{-1} = 3.2/24 = 0.133 \text{ heures}^{-1}$, et donc

$$\mathbb{P}(X < 2) = 1 - e^{-(2)(0.133)} = 0.234$$

Loi de Cauchy

Soit a un paramètre réel strictement positif. La fonction

$$f_a(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{est une densité de probabilité :}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) dt = 2 \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{a}{\pi} \frac{2}{a} [\arctan]_0^{\infty} = \frac{a}{\pi} \frac{\pi}{a} = 1.$$

Definition

Une variable aléatoire X à valeurs réelles suit une loi de Cauchy de paramètre a , si elle est absolument continue et admet $f_a(x)$ pour densité.

Propriétés :

- 1) L'espérance de la v.a. X n'existe pas
- 2) La v.a. n'admet pas de fonction génératrice des moments
- 3) La fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\phi(t) = e^{-a|t|}$$

Elle n'est pas dérivable en $t = 0$.

Loi normale

Definition

Une v.a.r. Z suit une loi normale centrée réduite si sa fonction de densité est

$$\varphi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Densité de $\mathcal{N}(0, 1)$

Propriétés de φ

φ est une fonction :

- paire strictement positive définie sur \mathbb{R} .
- Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Le maximum de φ est obtenu en $z = 0$ avec $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, elle a deux points d'inflexion pour $z = \pm 1$ avec $\varphi(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e}$.

On a $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz = 1$. Donc φ est une densité de probabilité.

Fonction de répartition

La fonction φ ne possède pas de primitive sous forme d'une fonction élémentaire, sa sa fonction de répartition :

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \quad \text{qui a la forme d'un } S$$

n'a pas d'expression analytique, on utilise donc des tables.

- $\Phi(x)$ a un point d'inflexion pour $x = 0$ avec $\Phi(0) = 1/2$
- usage fréquent de symétrie :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z| < z) &= \mathbb{P}(-z < Z \leq z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = \Phi(z) - [1 - \Phi(z)] \\ &= 2\Phi(z) - 1 \end{aligned}$$

Fonctions : Caractéristiques et génératrice des moments

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = 1.$$

$$M(u) = \mathbb{E}\left(e^{uX}\right) = e^{u^2/2} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Loi normale générale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Definition

Une v.a.r. X suit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$), si

$$X = \mu + \sigma Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma Z \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dz, \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Propriétés de f_X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- très **pointue** pour σ **petit**,
- très **étirée** pour σ **grand**.

Propriétés

①

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \Leftrightarrow X = \mu + \sigma Z$$

② Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Alors, la v.a.

$$Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

③ $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, et si X_1 et X_2 indép

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

$$X_1 - X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

Lecture de la table de $\mathcal{N}(0, 1)$

La fonction de répartition de la loi normale est tabulée uniquement pour la loi normale centrée réduite, $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

I) **Table 1.**

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = x? \quad \text{on se donne } t \quad \text{et on cherche } x$$

$$- t = 0.38 \rightarrow x?$$

$$0.38 = 0.3 + 0.08 \quad : \{ \text{ligne } 0.3 \} \cap \{ \text{colonne } 0.08 \} \Rightarrow x = 0.6480$$

II) **Table 2 : on se donne x et on cherche t**

$$- x = 0.6480 \rightarrow t?$$

$$\text{ligne } 0.64 \text{ (à droite)} \cap \text{colonne } 0.008 \text{ (en bas)} \Rightarrow t = 0.3799$$

La loi Log-normale

Definition

Une v.a. X à valeurs dans $]0, +\infty[$: $X \hookrightarrow \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$ (μ réel, $\sigma > 0$) si la v.a. $Y = \ln X$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

▷ La loi log-normle est **utilisée pour modéliser des variables aléatoires** prenant des valeurs positives et ayant tendance à **présenter des valeurs très élevées avec une faible probabilité** :

- débit de rivières présentant de courtes périodes de crue, concentration en polluants avec présence de pics de pollution, etc...
- la **longueur d'une phrase** mesurée en nombre de mots
- Le **temps de survie des bactéries** en présence de désinfectant,
- Les **doses de médicament** produisant un certain effet,

sont des exemples typiques de **v.a. suivant des lois log-normales**.

Propriétés

a) **Support** : $C_X =]0, \infty[$

b) **Fonction de répartition** de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \Phi_Y\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où ϕ_Y : fonction de répartition de Y .

c) **Densité** de X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x).$$

Propriétés

d) **Espérance et variance**

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad \mathbb{V}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

e) Si X suit la loi Log-normale de paramètre (μ, σ^2) , alors X^r ($r > 0$) suit la loi-Log normale de paramètres $(r\mu, r^2\sigma^2)$.

Démonstration

b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq \ln x) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi_Y\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Démonstration

b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq \ln x) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi_Y\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

c) La densité s'obtient en dérivant $F(x)$.

d) $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \sigma Z + \mu$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

$$Y = \ln X \Leftrightarrow X = e^Y = e^{\sigma Z + \mu}.$$

Démonstration

D'après le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma z + \mu} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} + \mu} dz \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} dz,\end{aligned}$$

d'où en faisant le changement de variable $z - \sigma = t$,

Démonstration

D'après le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma z + \mu} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} + \mu} dz \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} dz,\end{aligned}$$

d'où en faisant le changement de variable $z - \sigma = t$,

$$\mathbb{E}(X) = e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu}.$$

Démonstration

On obtient l'expression de la variance par un calcul analogue :

$$\mathbb{E}(X^2) = e^{2\sigma^2+2\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^{2\sigma^2+2\mu}.$$

$$\mathbb{V}(X) = e^{2\sigma^2+2\mu} - e^{\sigma^2+2\mu} = e^{\sigma^2+2\mu}(e^{\sigma^2} - 1).$$

e) $\ln X^r = r \ln X$. Or

$$\ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad r \ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(r\mu, r^2\sigma^2).$$

Loi gamma

Definition

La fonction gamma (ou seconde fonction d'Euler) est définie pour tout nombre réel $a > 0$ par

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Occurrence de la Loi gamma

▷ La fonction Γ permet d'introduire une classe de lois de probabilité **dépendant de deux paramètres strictement positifs** dont le domaine d'application est très vaste.

Par exemple :

- le **temps** de fonctionnement d'un appareil **avant la première panne** est souvent modélisé par une loi **exponentielle**.
- Mais lorsqu'un appareil **subit une usure**, son **temps de fonctionnement** en tenant compte de l'usure au cours du temps est plutôt modélisé par une **loi gamma**.

Loi gamma

Definition

Une v.a. X à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit la loi $\Gamma(a, \lambda)$ (*gamma de paramètres* $a > 0, \lambda > 0$) si elle est absolument continue et admet pour densité :

$$f_{X_{a,\lambda}}(x) =: f_X(x) \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{a-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \gamma(a, \lambda)$.

Remarque. Lorsque $a = 1$, la loi $\Gamma(1, \lambda)$ coïncide avec la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Propriétés :

①

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{a}{\lambda^2}.$$

② La fonction génératrice des moments

$$M(u) = \mathbb{E}(e^{uX}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - u} \right)^a \quad (u \in]-\infty, \lambda[)$$

③ Fonction caractéristique

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 - it\lambda)^a}$$

④ $X_1 \hookrightarrow \gamma(a_1, \lambda)$ et $X_2 \hookrightarrow \gamma(a_2, \lambda) \Rightarrow X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(a_1 + a_2, \lambda)$.

Lois peuvent être obtenues de la loi gamma

Certaines lois peuvent être obtenues à partir de loi $\Gamma(a, \lambda)$ en faisant varier les paramètres a et $\lambda > 0$.

- 1 $\mathcal{L}(\Gamma(1, \lambda)) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{E}(\lambda))$.
- 2 $\mathcal{L}(\Gamma(n, \lambda))$ (n entier > 0) $\equiv \mathcal{L}(\sum_{i=1}^n X_i, X_i \text{ indép } X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda))$
- 3 Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors $X = Y^2$ a pour loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Démonstration

Point 3) : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow X = Y^2 \hookrightarrow \Gamma(1/2; 1/2)$. Fonction génératrice de X :

$$M_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{uy^2 - y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2/2)(1-2u)} dy.$$

La dernière intégrale est convergente

$$\Leftrightarrow 1 - 2u > 0.$$

Soit $u < 1/2$ et faisons le changement de variable $y\sqrt{1-2u} = t$. Il vient :

Démonstration

Point 3) : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow X = Y^2 \hookrightarrow \Gamma(1/2; 1/2)$. Fonction génératrice de X :

$$M_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{uy^2 - y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2/2)(1-2u)} dy.$$

La dernière intégrale est convergente

$$\Leftrightarrow 1 - 2u > 0.$$

Soit $u < 1/2$ et faisons le changement de variable $y\sqrt{1-2u} = t$. Il vient :

$$M_X(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2u}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{1-2u}} \quad (u \in]-\infty, \frac{1}{2}[)$$

qui est la fonction génératrice des moments de la loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Lois de Pearson (ou du khi-2)

Definition

Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit la loi χ_ν^2 (chi-2 à ν degrés de liberté) si elle est absolument continue et admet pour densité

$$f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lois de Pearson (ou du khi-2)

Remarque

Espérance et variance : $\mathbb{E}(X) = \nu$ et $\mathbb{V}(X) = 2\nu$

- 1 La loi de χ_ν^2 coïncide avec la loi $\Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})$.
- 2 En particulier, la loi de $\chi_{\nu=2}^2$ coïncide avec la loi $\Gamma(1, \frac{1}{2}) \equiv \mathcal{E}(\frac{1}{2})$

Proposition-Définition

Proposition

Soient Y_1, \dots, Y_n des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors, la variable aléatoire

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i^2 \leftrightarrow \chi_n^2 \quad (\text{chi-deux a } n \text{ degrés de liberté}). \quad (2)$$

L'expression (??) est utilisée souvent comme définition de la loi du chi-2. En pratique, on se sert de tables ou de logiciels

Proposition

-Définition. Soient Z et X deux v.a. indépendantes :

$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $X \hookrightarrow \chi_{\nu}^2$. Alors, la v.a.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$$

a pour loi la loi de Student à ν degrés de liberté. Notée : $T \hookrightarrow t_{\nu}$.

Remarque

- La loi de Student à 1 degré de liberté est la loi de Cauchy de paramètre 1.
- Quand ν tend vers l'infini, T tend vers la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- On a recours généralement à des tables ou à des logiciels pour évaluer des probabilités associées.

Lois de Fisher-Snedecor

Proposition

-Définition Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives

$$X_1 \hookrightarrow \chi_{\nu_1}^2 \quad \text{et} \quad X_2 \hookrightarrow \chi_{\nu_2}^2. \quad \text{Alors, la v.a.}$$

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

a pour loi la loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté. Notée :
 $F \hookrightarrow \mathcal{F}_{\nu_1, \nu_2}$.

Loi de Weibull

Definition

Une v.a. continue X suit une loi de Weibull de paramètres $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, notée $W(\alpha, \beta, \gamma)$ si la variable

$Y = \left(\frac{X-\gamma}{\alpha}\right)^\beta \hookrightarrow \mathcal{E}(1, 0)$. X a pour densité

$$f_X(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t) \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^\beta}$$

$$\beta = 1 \Rightarrow W(\alpha, 1, \gamma) \equiv \mathcal{E}\left(\theta = \frac{1}{\alpha}, \nu = \gamma\right)$$

Fonction de répartition

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left[\frac{t-\gamma}{\alpha}\right]^\beta\right) & \text{si } t > \gamma \\ 0 & \text{si } t \leq \gamma \end{cases}$$

Espérance et variance

$$\mathbb{E}(X) = \gamma + \alpha \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right), \quad \mathbb{V}(X) = \alpha^2 \left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^2 \right]$$

Occurrence de la loi de Weibull

La loi de Weibull est utilisée en fiabilité de matériel, elle peut par exemple représenter la tension à laquelle un matériau se brise.

En pratique on pose souvent $\alpha = 1$ et $\gamma = 0$, le paramètre β est alors interprété de la façon suivante :

$\beta > 1$ correspond à un matériel qui se dégrade avec le temps (usure)

$\beta < 1$ correspond à un matériel qui se perfectionne avec le temps

$\beta = 1$ correspond à un matériel sans usure (loi exponentielle pour pannes purement accidentelles).

Transformation de variables aléatoires

Definition

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \quad \text{ou encore} \quad : \Omega \xrightarrow{\varphi(X)} \mathbb{R}.$$

On pose $Y = \varphi(X)$

- Y définit une nouvelle variable aléatoire si :
 $\forall b \in \mathbb{R}, \varphi^{-1}(]-\infty, b]) = \{x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \leq b\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si D_X est le support de X , alors celui de Y est $D_Y = \varphi(D_X)$.

On va se limiter aux cas où X et Y sont toutes deux discrètes ou toutes deux continues.

Loi de probabilité de transformée : Cas général

Definition

A) Cas discret : Si X une variable aléatoire discrète, alors

- La loi de probabilités de Y est donnée par :

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \begin{cases} \sum_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) := \sum_{x \in B} p_X(x) & \text{si } y \in D_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

B) Cas continu : Si X une variable aléatoire continue. On suppose que $Y = \varphi(X)$ est aussi une v.a. continue, i.e. $C_Y = \varphi(C_X)$ intervalle de \mathbb{R} . Alors,

$$F_Y(y) = \int_{x \in C_X} f_X(x) dx$$

Cas des fonctions strictement monotones : Cas continu

Lorsque φ est strictement monotone sur C_X . On pose $X = \varphi^{-1}(Y)$.

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq \varphi^{-1}(y) = F_X(\varphi^{-1}(y)) & \text{pour } \varphi \nearrow \\ \mathbb{P}(X \geq \varphi^{-1}(y) = 1 - F_X(\varphi^{-1}(y)) & \text{pour } \varphi \searrow \end{cases}$$

Proposition

Soit X une v.a. continue et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable strictement monotone. On suppose que : $Y = \varphi(X)$ est une v.a. continue, i.e. $C_Y = \varphi(C_X)$ intervalle de \mathbb{R} . On note ψ sa réciproque ($\psi = \varphi^{-1}$) que l'on suppose dérivable.

- La densité de probabilité de Y est donnée par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\varphi^{-1}(y)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} \right| := f_X(\psi(y)) |\psi'(y)| & \text{si } y \in C_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve de la proposition

On a $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$. Quand φ est **strictement croissante**,

$$F_Y(y) = \frac{dF_X(\varphi^{-1}(y))}{dy} = \frac{dF_X(\varphi^{-1}(y))}{d\varphi^{-1}(y)} \times \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}$$

comme $x = \varphi^{-1}(y)$, on a alors :

$$\frac{dF_X(\varphi^{-1}(y))}{d\varphi^{-1}(y)} = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x) = f_X(\varphi^{-1}(y)),$$

ce qui donne

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}, \quad \text{avec} \quad \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} > 0$$

Quand φ est **strictement décroissante**,

$$F_Y(y) = \frac{d[1 - F_X(\varphi^{-1}(y))]}{dy} = -\frac{dF_X(\varphi^{-1}(y))}{d\varphi^{-1}(y)} \times \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}$$

ce qui donne

$$f_Y(y) = -f_X(\varphi^{-1}(y)) \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}, \quad \text{avec} \quad \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} < 0.$$

En combinant ces deux cas on obtient le résultat. \square

Exemple

Exemple

Soit X v.a. ayant pour densité f et φ la transformation linéaire :

$$\varphi(x) = ax + b$$

Déterminer la loi de v.a. $Y = aX + b$ ($a \neq 0$).

Solution.

$$C_Y = \varphi(C_X) = \varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \varphi^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}, \quad \psi'(x) = \frac{1}{a}.$$

D'où

$$g_Y(y) = \begin{cases} f_X(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } y \in C_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple (suite)

On peut aussi procéder comme suit :

On détermine d'abord la fonction de répartition de Y :

Pour $a > 0$:

$$G(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \frac{y-b}{a}) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{et pour } a < 0 : \quad G(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \geq \frac{y-b}{a}) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

En déduit la densité de Y par dérivation.

Exemple

Exemple

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(1, 3)$. Si $Y = X^3$, quelle est l'expression de la fonction de répartition de densité de probabilité $f_Y(y)$

(1) selon le procédé général ?

(2) en tenant compte du fait que x^3 est strictement croissante.

(1) En utilisant le procédé général,

$$(Y \leq y) \equiv (X \leq y^{1/3}) = (X \leq x), \quad \text{où } x = \sqrt[3]{y}.$$

On obtient donc

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt[3]{y}).$$

Puisque

$$F_X(x) = \frac{x-1}{2}, \quad \text{on a } F_Y(y) = \frac{\sqrt[3]{y}-1}{2} \quad \text{pour } y \in [1, 27].$$

La fonction de densité de probabilité est donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}} & \text{pour } y \in [1, 27] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple (suite)

2) On a

$$y = \varphi(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

et donc

$$\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \quad \text{avec} \quad f_X(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } y \in [1, 27]$$

La formule donne alors la même chose.

Exemple

Exemple

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Donner la transformation permettant de se ramener à une loi normale réduite et calculer sa densité.

Soit $Z = (X - \mu)/\sigma$, alors $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On peut écrire

$$Z = \varphi(X) = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}.$$

On alors

$$\varphi^{-1}(Z) = \sigma Z + \mu \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz} = \sigma.$$

Ainsi,

$$f_Z(z) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma z + \mu) - \mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

qui est la densité d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi Uniforme et Simulation

Théorème

Soit X v.a. continue, F_X sa fonction de répartition. Alors la v.a. $U = F_X \circ X = F_X(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Supposons F_X **strictement croissante**. $U = \varphi(X)$ avec $\varphi = F_X$,
 $x \mapsto \varphi(x) = u$.

$$\varphi(x) = u \Rightarrow x = \varphi^{-1}(u), \quad \psi = F_X^{-1} \quad \text{et} \quad \psi' = [F_X^{-1}]'(u) = \frac{1}{f_X(u)}$$

$$C_U = \varphi(C_X) = F_X(\mathbb{R}) = [0, 1].$$

La densité de U est donc donnée pour tout $u \in [0, 1]$ par :

$$g_U(u) = \frac{f_X(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(x)}{F'(x)} = 1 \quad U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}.$$

Grâce à ce théorème, en prenant l'inverse de F_X (quand cela est possible), on obtient une valeur de X donnée par

$$x = F_X^{-1}(u).$$

On simule ainsi une variable aléatoire continue par la méthode de Monte-Carlo.



Exercice

Exercice

Déterminer les caractéristiques de la variable aléatoire : $Y = \varphi(X)$ où $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et $\varphi(x) = e^x$.

Il faut préciser : le support, la densité de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de Y .

Solution $Y = \varphi(X)$ où $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et

$$\varphi(x) = e^x, \quad \psi(x) = \varphi^{-1}(x) = \ln(x).$$

Support de X :

$$C_X = [0, 1] \implies C_Y = \varphi(C_X) = \exp([0, 1]) = [1, e].$$

Densité de probabilité :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\psi(y))|\psi'(y)| = 1 \times \frac{1}{y} = \frac{1}{y} & \text{si } y \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice (suite)

Fonction de répartition :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \ln(y) & \text{si } y \in [1, e] \\ 1 & \text{si } y > e \end{cases}$$

Espérance :

$$E(Y) = E(e^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f_x(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Variance de X :

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x)^2 f_x(x) dx = \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 = \frac{-e^2 + 4e - 3}{2}.$$